ein Widerspruch?

Produktkalkulation ohne Schadenerfahrung und Implikationen auf das Risikomanagement am Beispiel der Sonnenschirmumfallversicherung

ForumV, 26.06.2017

ERGO Direkt

Versichern heißt verstehen.

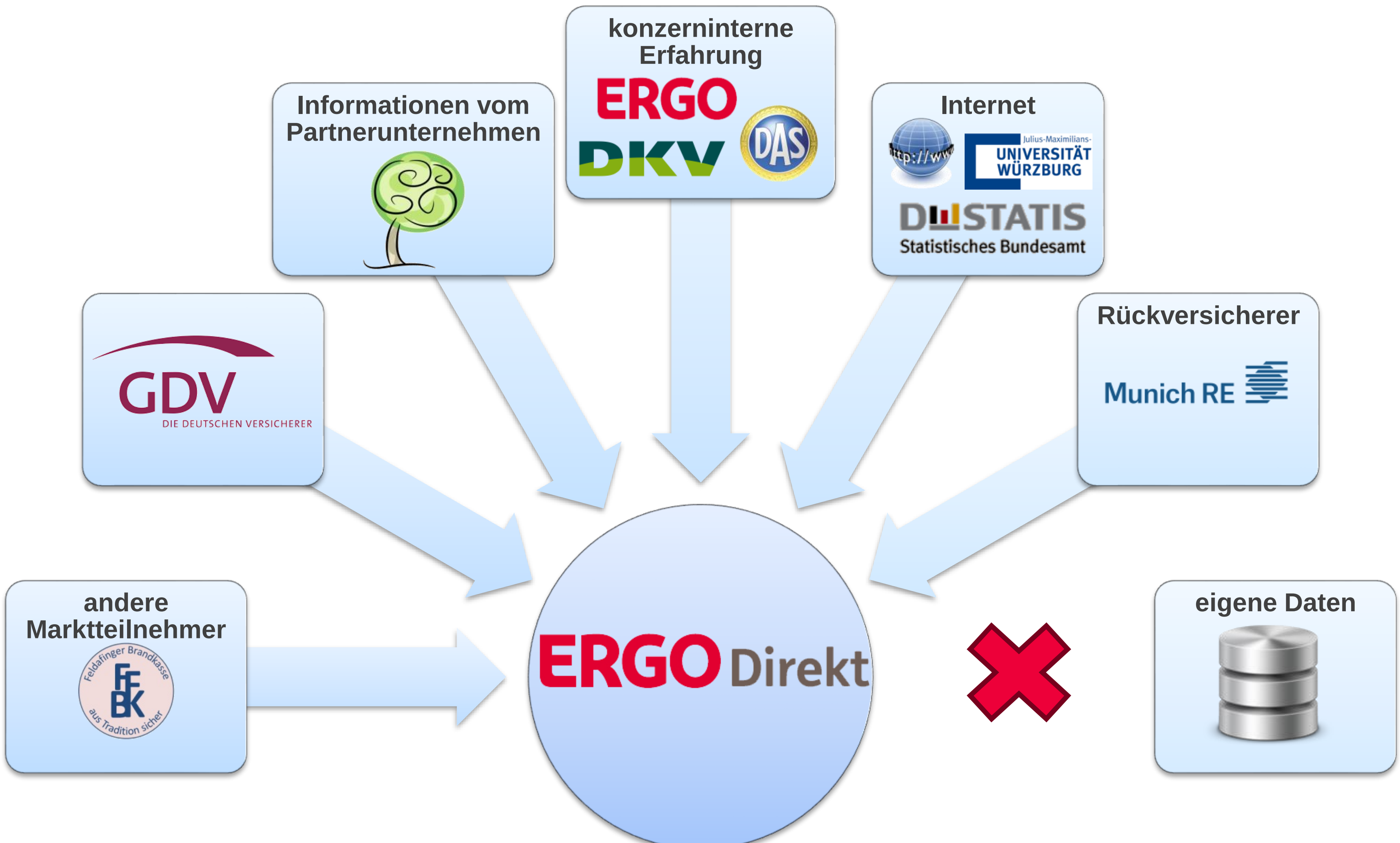
Produktübersicht
Geplant ist zwei Produkte mit unterschiedlicher Leistungen anzubieten.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Produktübersicht im Entwicklungsprozess		
Versichertes Risiko	Umfallen eines Sonnenschirm in einem privaten Garten	
Vertragsdauer	1 Jahr / gesetzlicher Widerruf / keine Verlängerung	
Leistung	2 Kugeln Eis je anwesende Person (maximal für 5 Personen)	2 Kugeln Eis je anwesende Person (maximal für 10 Personen)
Limit	es wird nur ein Schaden übernommen	es wird nur ein Schaden übernommen
Bruttoprämie	**1,50 €**	**4,00 €**
Beitragszahler	Sonnenschirmverkäufer	Gartenbesitzer

Möglichkeiten der Informationsgewinnung

da keine eigene Schadenerfahrung vorliegt, muss man versuchen andere Quellen zu verwenden



Schätzung der Schadenfrequenz mittels der Formel von Bayes

Verschiedene Informationsquellen liefern die Daten zur Verwendung der Formel von Bayes um eine Schätzung für die Schadenfrequenz zu erhalten

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

- 25% bis 40% der von umgefallenen Sonnenschirme standen in einem Garten
- 10% der nicht umgefallenen Schirme standen in einem Garten

http://www

- Pro Jahr fallen in Deutschland 3% bis 10% der Sonnenschirme um

$P(GS|US) = 30\%$

$P(GS|\hat{\ }US) = 10\%$

$P(US) = 5\%$

$$P(US|GS) = \frac{P(GS|US) \cdot P(US)}{P(GS|US) \cdot P(US) + P(GS|\hat{\ }US) \cdot P(\hat{\ }US)} = 13{,}4\%$$

US: umgefallener Sonnenschirm;
GS: verkaufter Sonnenschirm wird in einem Garten benutzt

^US: das Komplement dazu, ein Sonnenschirm der nicht umgefallen ist
^GS: das Komplement dazu, also ein Sonnenschirm der nicht im Garten benutzt wird

Prävalenz: Anteil der erkrankten Personen in der Grundgesamtheit

mögliche Testergebnisse	tatsächlich negativ	tatsächlich positiv
negativ erkannt	richtig klassifiziert	falsch klassifiziert
positiv erkannt	falsch klassifiziert	richtig klassifiziert

Spezifität:
P(negativ erkannt | tatsächlich negativ)

Sensitivität:
P(positiv erkannt | tatsächlich positiv)

Formel von Bayes:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c)}$$

Aufgabe:
Ein Test auf eine bestimmte Krankheit wird durchgeführt. Dabei beträgt die Prävalenz 20%, die Sensitivität 80% und die Spezifität 80%.
a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person auch tatsächlich erkrankt ist?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine negativ getestete Person auch tatsächlich gesund ist?

Die Wahrscheinlichkeit für einen als fälschlich krank bezeichneten ist relativ hoch, wogegen ein vom Test als gesunder klassifizierter auch sehr wahrscheinlich gesund ist.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Lösung:

Zu a) Wir suchen $P(\text{krank} \mid \text{Test ist positiv})$. Nach der Formel von Bayes gilt

$$
\begin{aligned}
&P(\text{krank} \mid \text{Test ist positiv}) \\
&= \frac{P(\text{Test ist positiv} \mid \text{krank})\,P(\text{krank})}{P(\text{Test ist positiv} \mid \text{krank})\,P(\text{krank}) + P(\text{Test ist positiv} \mid \text{gesund})P(\text{gesund})} \\
&= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}8 \cdot 0{,}2 + (1-0{,}8)\cdot(1-0{,}2)} = 50\% \quad .
\end{aligned}
$$

Zu b) Wir suchen $P(\text{gesund} \mid \text{Test ist negativ})$. Nach der Formel von Bayes gilt

$$
\begin{aligned}
&P(\text{gesund} \mid \text{Test ist neagtiv}) \\
&= \frac{P(\text{Test ist negativ} \mid \text{gesund})\,P(\text{gesund})}{P(\text{Test ist negativ} \mid \text{krank})\,P(\text{krank}) + P(\text{Test ist negativ} \mid \text{gesund})P(\text{gesund})} \\
&= \frac{0{,}8 \cdot (1-0{,}2)}{(1-0{,}8)\cdot 0{,}2 + 0{,}8\cdot(1-0{,}2)} = 94{,}12\% \quad .
\end{aligned}
$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten lassen sich auch grafisch ohne (direkter) Verwendung der Formel von Bayes bestimmen.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

P(krank) = 0,2

P(positiv | krank) = 0,8

P(negativ | gesund) = 0,8

k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g
k	k	g	g	g	g	g	g	g	g

$$P(\text{krank} \mid \text{positiv}) = \frac{16}{16+16} = 50\%$$

$$P(\text{gesund} \mid \text{negativ}) = \frac{64}{64+4} = 94{,}12\%$$

Die Studie der Uni Würzburg enthält Datenmaterial mit dem man die Schadenhöhe quantifizieren kann.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Tabelle 3.5 Anwesende beim Umfallen eines Schirms

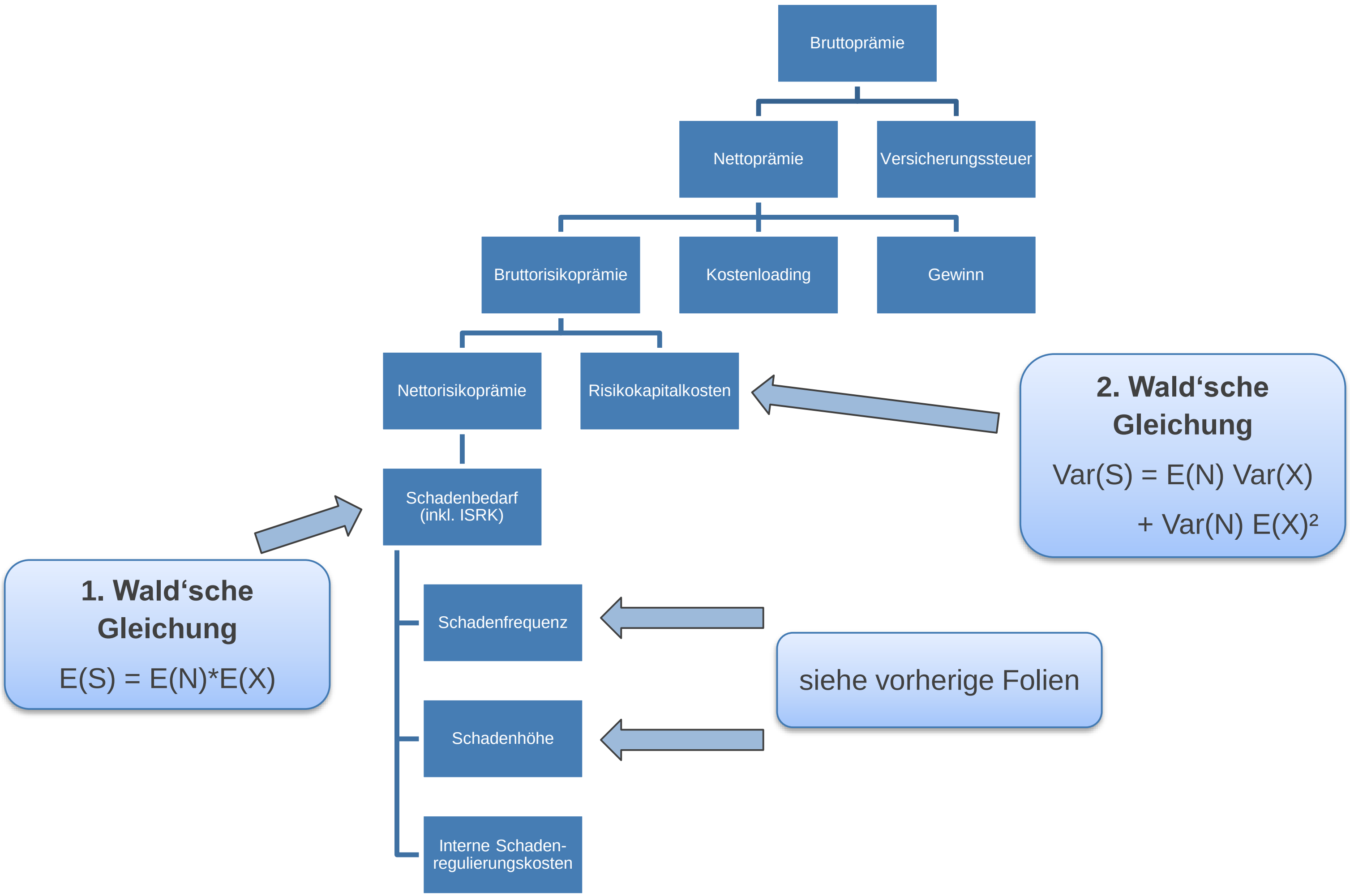
	Anzahl	(Anteil %)
1 Person	127	(10%)
2 Personen	255	(19%)
3 Personen	382	(29%)
4 Personen	319	(24%)
5 Personen	127	(10%)
6 Personen	63	(5%)
7 Personen	38	(3%)
8 Personen	25	(2%)
...	...	

Informationen
zu den Eispreisen

	Variante bis zu 5 Personen	Variante bis zu 10 Personen
EW Schaden in Höhe	5,8	10,3

Aus Schadenhöhe und Schadenfrequenz ergibt sich die Netto-Risikoprämie, woraus dann die Bruttoprämie bestimmt wird.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.



Mittels Monte-Carlo Simulationen können analytisch nicht oder nur schwer lösbare Probleme numerisch gelöst werden.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Monte-Carlo-Simulation

Monte-Carlo-Simulation oder **Monte-Carlo-Studie**, auch **MC-Simulation**, ist ein Verfahren aus der Stochastik, bei dem eine sehr große Zahl gleichartiger Zufallsexperimente die Basis darstellt. Es wird dabei versucht, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie analytisch nicht oder nur aufwendig lösbare Probleme numerisch zu lösen. Als Grundlage ist vor allem das Gesetz der großen Zahlen zu sehen. Die Zufallsexperimente können entweder – etwa durch Würfeln – real durchgeführt werden oder in Computerberechnungen über Erzeugung geeigneter Zufallszahlen.

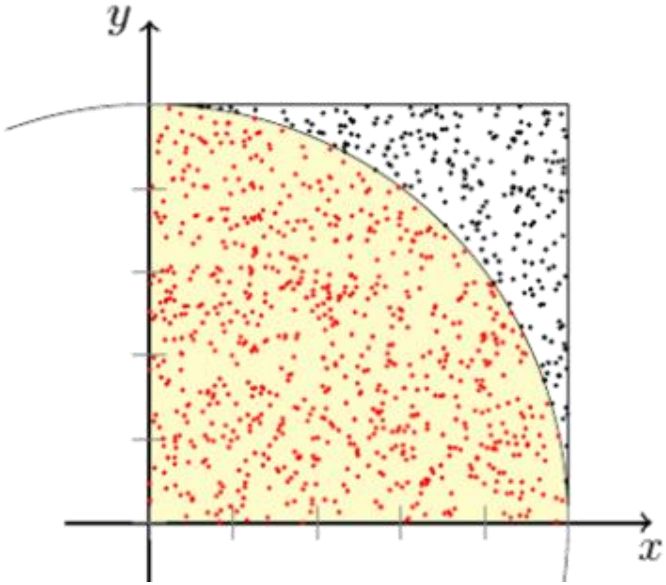
Ein einfaches Beispiel:

Wir wollen mittels Monte-Carlo-Simulation π abschätzen. Dazu erzeugen wir Zufallsvektoren in einem Einheitsquadrat und zählen, welche davon in einen einbeschriebenen Viertelkreis fallen.

Die Fläche des Quadrats 1 und die Fläche des Viertelkreises 0,25 π .

Sind m der n Zufallszahlen in dem Quadrat, so erhalten wir als Schätzer für π :

$$\hat{\pi} = 4 \cdot \frac{m}{n} .$$

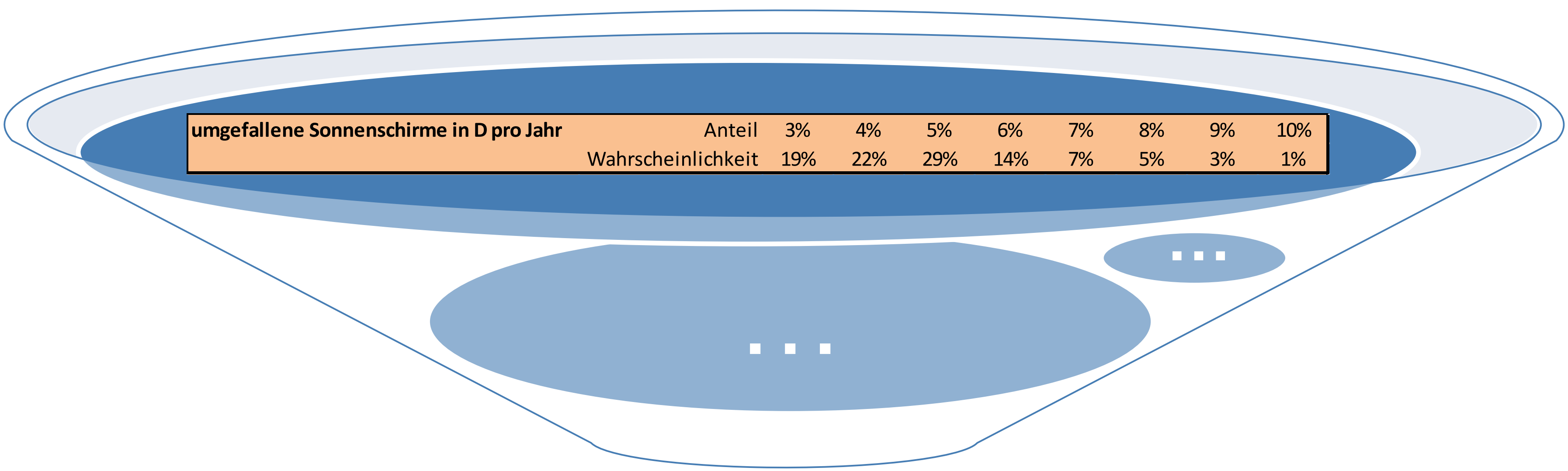


„Pi statistisch" von Springob aus der deutschsprachigen Wikipedia.
Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pi_statistisch.png#/media/File:Pi_statistisch.png

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Ansatz 1 (Parameter werden mit Wahrscheinlichkeiten hinterlegt)

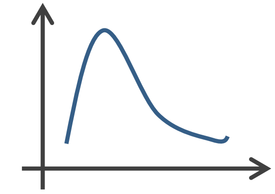
- jeder geschätzten Parameter in der Formel von Bayes wird mit einer (aus dem Bauch) bestimmten Verteilung hinterlegt
- unabhängiges Ziehen mit zurücklegen und einsetzten in die Formel von Bayes ergibt Verteilung des Parameterfehlers der Schadenfrequenz



umgefallene Sonnenschirme in D pro Jahr									
	Anteil	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
	Wahrscheinlichkeit	19%	22%	29%	14%	7%	5%	3%	1%

zufälliges ziehen einzelner Parameter

$$P(US\,|\,GS)=\frac{P(GS\,|\,US)\cdot P(US)}{P(GS\,|\,US)\cdot P(US)+P(GS\,|\,{}^\wedge US)\cdot P({}^\wedge US)}$$



ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

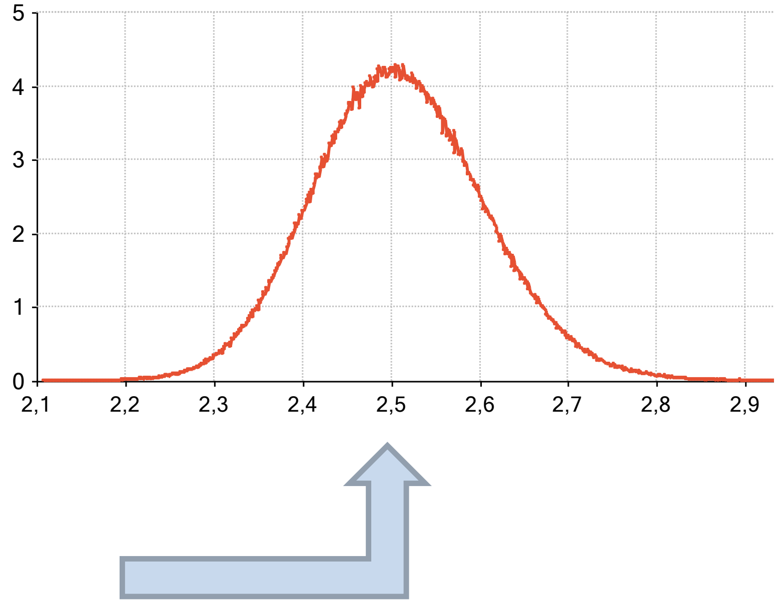
Ansatz 2 (Angabe von Mittelwert & Standardabweichung)

- Erzeuge je Simulationspfad lognormalverteilte Zufallszahlen
- Berechne je Pfad Mittelwert

- **Beispiel:**
  - Mittelwert 2,51
  - Standardabweichung 3,35
  - Stichprobengröße 1.228

  - Vorgehen

1. Ziehe 1.228 mal aus einer Lognormalverteilung
   mit Erwartungswert 2,51 und Standardabweichung 3,35
2. Schätze daraus den Erwartungswert neu
   ➔ dies ergibt eine Realisation der Zufallsvariablen
3. n-maliges wiederholen liefert n Realisationen aus denen
   die zugrundeliegende Verteilungsfunktion geschätzt werden kann



Bootstrapping (Statistik)

Bootstrapping ist in der Statistik eine Methode des Resampling. Dabei werden wiederholt Statistiken auf der Grundlage lediglich einer Stichprobe berechnet. Verwendung finden Bootstrap-Methoden, wenn die theoretische Verteilung der interessierenden Statistik nicht bekannt ist. Diese Methode wurde erstmals von Bradley Efron 1979 in *Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife* beschrieben.

Einfaches Beispiel:

Wir beobachten folgende Realisationen x_i einer Zufallsvariablen X unbekannter Verteilung:

0,42; 0,25; 0,82; -0,50; 1,19; -0,12; -0,86; 0,93; -0,10; -0,76

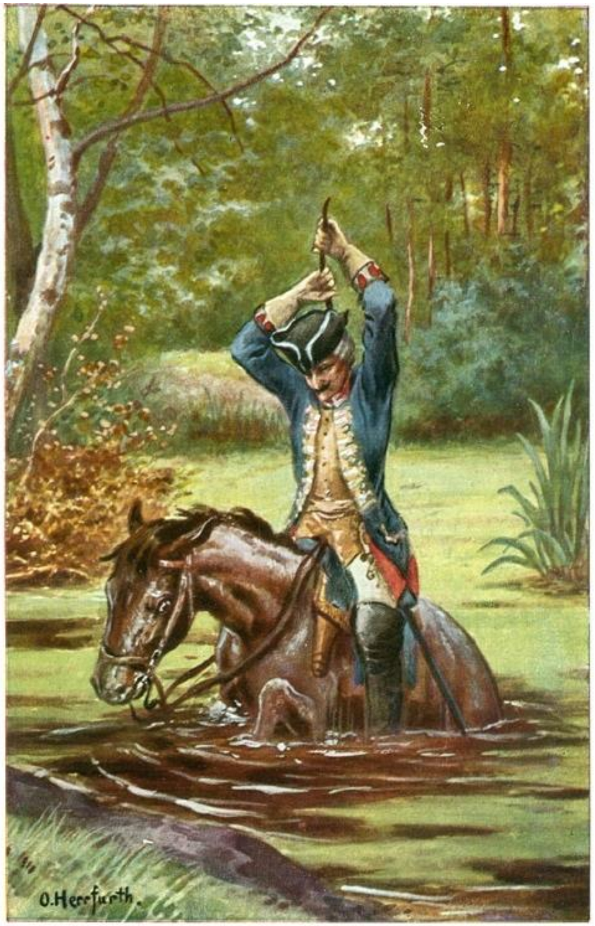
Ein Schätzer für den Erwartungswert ist das arithmetische Mittel $\bar{x} = 0{,}127$.

Mittels Bootstrapping wollen wir nun ein Konfidenzintervall für diesen Schätzer ermitteln.

Wir ziehen dafür zufällig (in unserem einfachen Beispiel nur) 5 Mal aus den Originaldaten **mit** Zurücklegen und erhalten:

- 0,42; 0,42; 0,82; 1,19; 0,25; -0,50; -0,10; -0,86; -0,50; -0,50 $\bar{x} = 0{,}06$
- 0,42; -0,86; 0,25; -0,50; 0,93; 0,82; 0,93; -0,50; 0,82; 1,19 $\bar{x} = 0{,}35$
- 0,25; 1,19; 0,82; -0,86; 0,82; -0,12; -0,86; -0,10; 0,93; 0,82 $\bar{x} = 0{,}29$
- 0,25; -0,10; -0,86; -0,50; -0,10; -0,10; -0,12; 0,42; 0,93; -0,10 $\bar{x} = -0{,}03$
- 0,42; 0,82; -0,50; -0,50; 0,93; 1,19; -0,86; -0,86; 0,93; -0,12 $\bar{x} = 0{,}15$

Zieht man nicht nur 5 Mal sondern mehre Male, so erhält meinen einen Schätzer für die Verteilungsfunktion des arithmetischen Mittels.



Münchhausen O. Herrfurth pinx

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Ansatz 3 (aus Häufigkeitstabelle)

- Daten liegen in der Regel als Häufigkeitstabelle vor (siehe rechts)
- Bootstrapen um Verteilung zu generieren
  (Gesamtzahl der Beobachtungen bestimmt die Anzahl des Ziehens mit zurücklegen aus der vorgegeben Verteilung)

Tabelle 3.5 Anwesende beim Umfallen eines Schirms

	Anzahl
1 Person	127
2 Personen	255
3 Personen	382
4 Personen	319
5 Personen	127
6 Personen	63
7 Personen	38
...	...

1. Realisation

	Anzahl
1 Person	125
2 Personen	256
3 Personen	384
4 Personen	319
5 Personen	127
6 Personen	66
7 Personen	34
...	...

2. Realisation

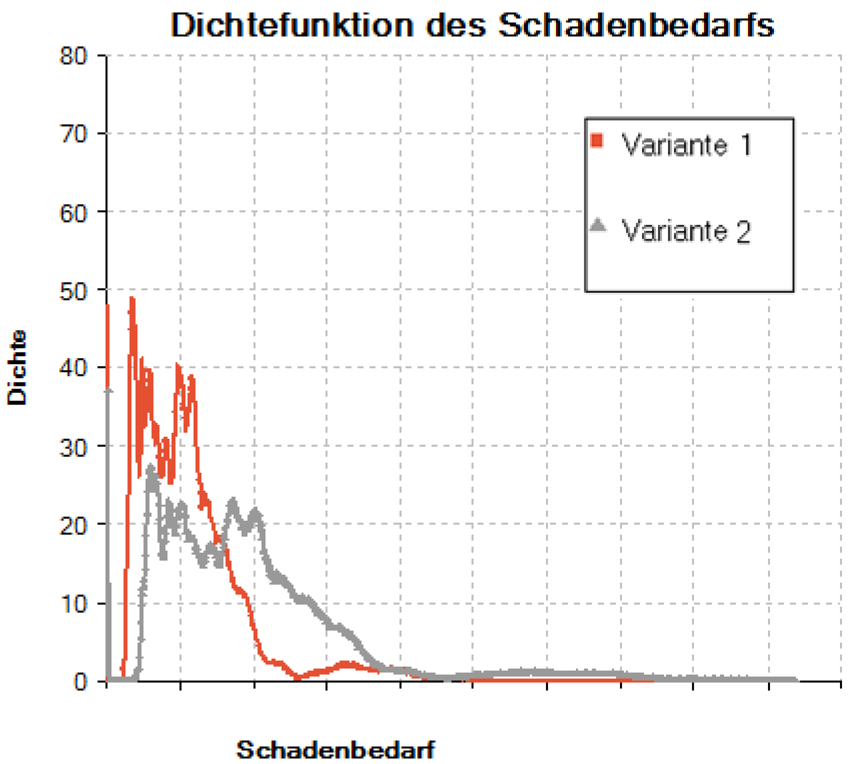
	Anzahl
1 Person	128
2 Personen	252
3 Personen	385
4 Personen	318
5 Personen	126
6 Personen	64
7 Personen	38
...	...

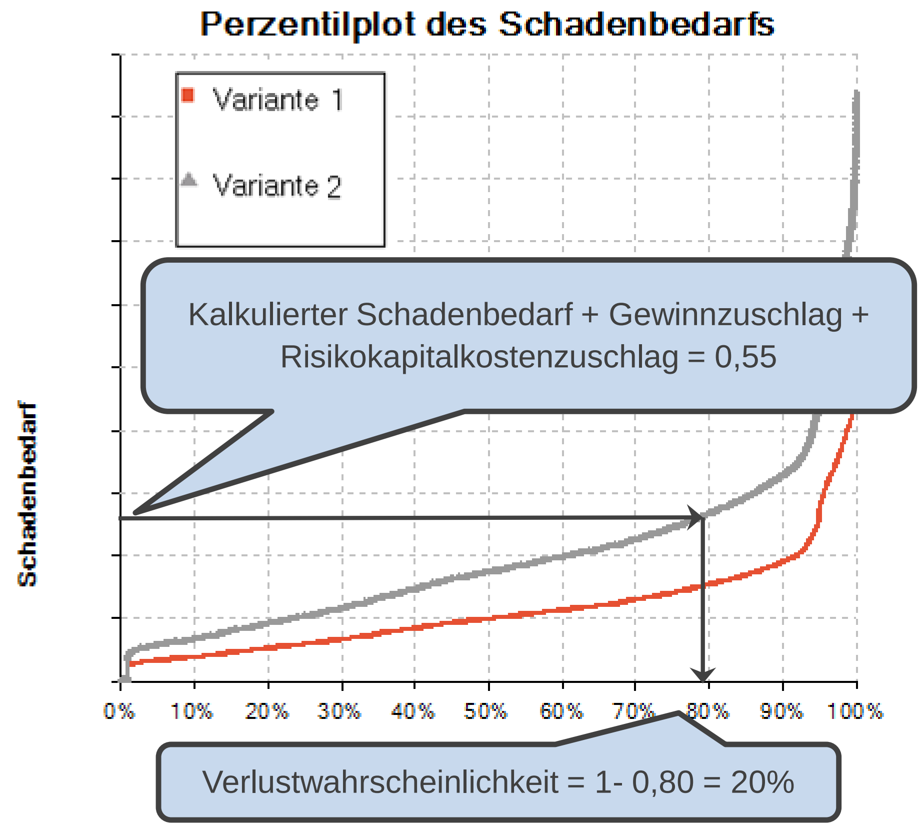
3. Realisation

	Anzahl
1 Person	127
2 Personen	258
3 Personen	381
4 Personen	319
5 Personen	126
6 Personen	64
7 Personen	36
...	...

Daraus ergibt sich eine Verteilung von Häufigkeitstabellen oder aber auch eine Verteilung von Kennzahlen wie den Erwartungswert

Mit Igloo können die einzelnen Verteilungen aggregiert werden und Ergebnisse für die Gesamtverteilung erzeugt werden



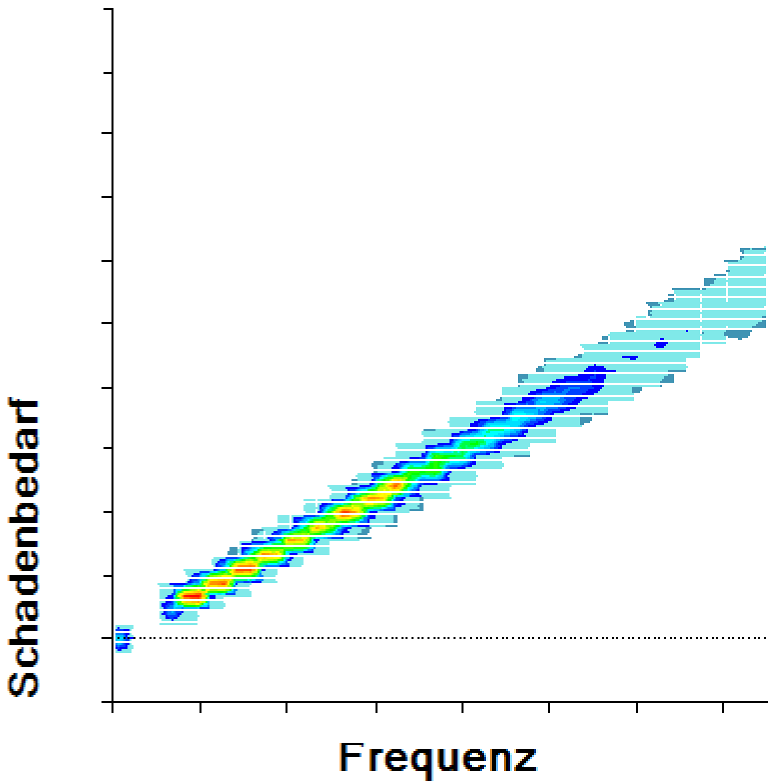


- höheres Parameterrisiko bei der Variante der Übernahme von bis 10 Personen (breitere Dichte), da die Verteilung der anwesenden Personen eine höheren Einfluss hat
- praktische Anwendung für die Tarifierung: es kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass der einkalkulierte Gewinn nicht ausreicht, um den Schätzfehler bei der Tarifierung auszugleichen

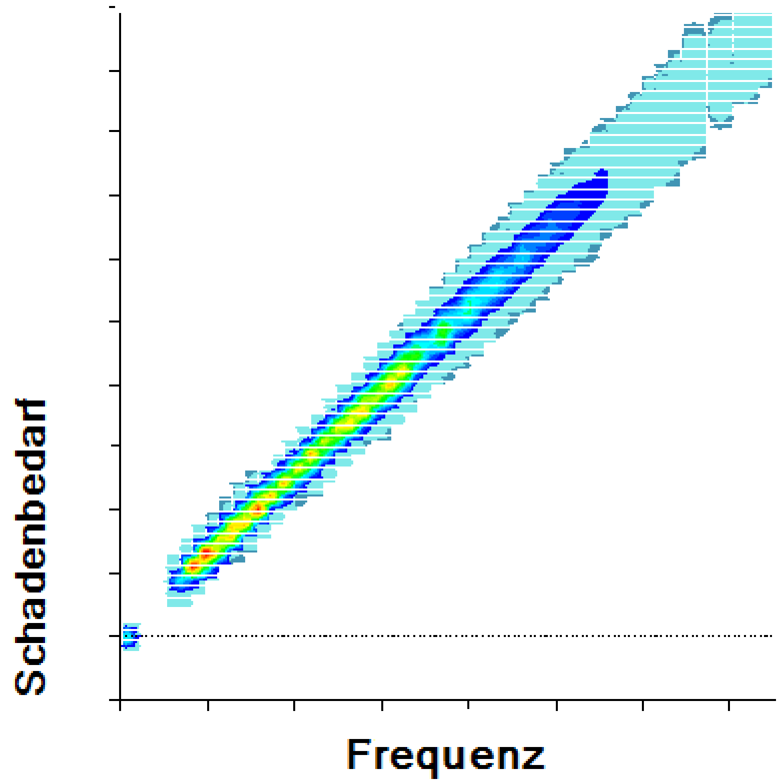
Parameterrisiko der Frequenz ist Haupttreiber für das gesamte Risiko.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Variante bis zu 5 Personen



Variante bis zu 10 Personen



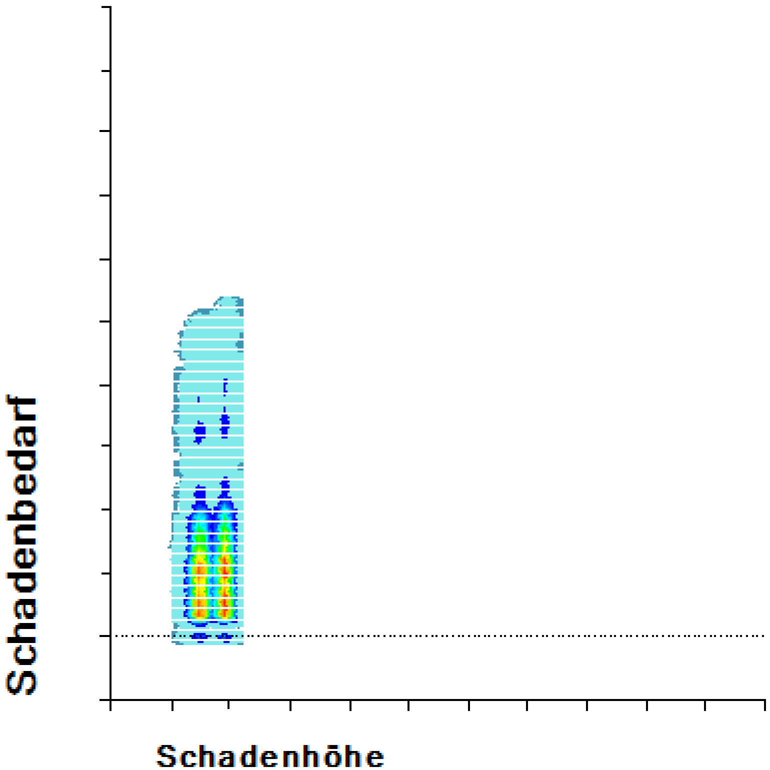
Plots sind eine Gerade mit einer geringen Streuung

➔ Frequenz ist Haupttreiber für das Risiko aus der Parameterschätzung

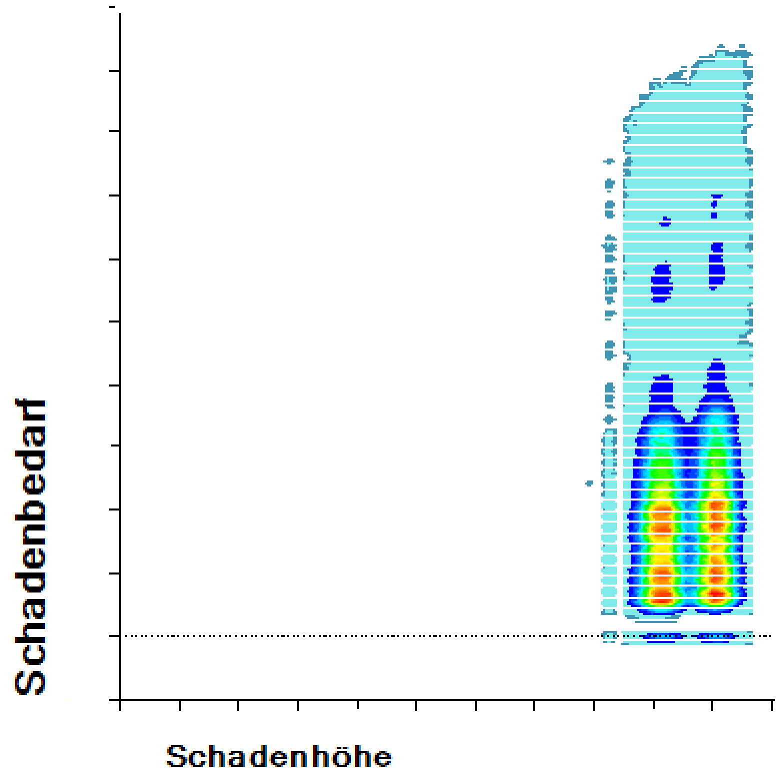
Parameterrisiko der Schadenhöhe spielt kaum eine Rolle für das gesamte Parameterisiko.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Variante bis zu 5 Personen



Variante bis zu 10 Personen



Plots sind keine Gerade sondern ein „Rechteck“

➔ Bestätigung: Schadenhöhe spielt kaum eine Rolle für das Risiko aus der Parameterschätzung

Macht entschlossener Minderheiten

- Wir betrachten einen Wahlvorgang mit einer großen Zahl n von Wählenden, die sich zwischen zwei Kandidaten A und B entscheiden.
- Eine kleine Gruppe von k Wählern wählen stets Kandidat A.
- Der Rest der Wähler ist unentschlossen und entscheidet jeweils unabhängig per Münzwurf.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass für n = 1.000.000 und k = 2.000 Kandidat A gewinnt?

<u>Lösung</u>

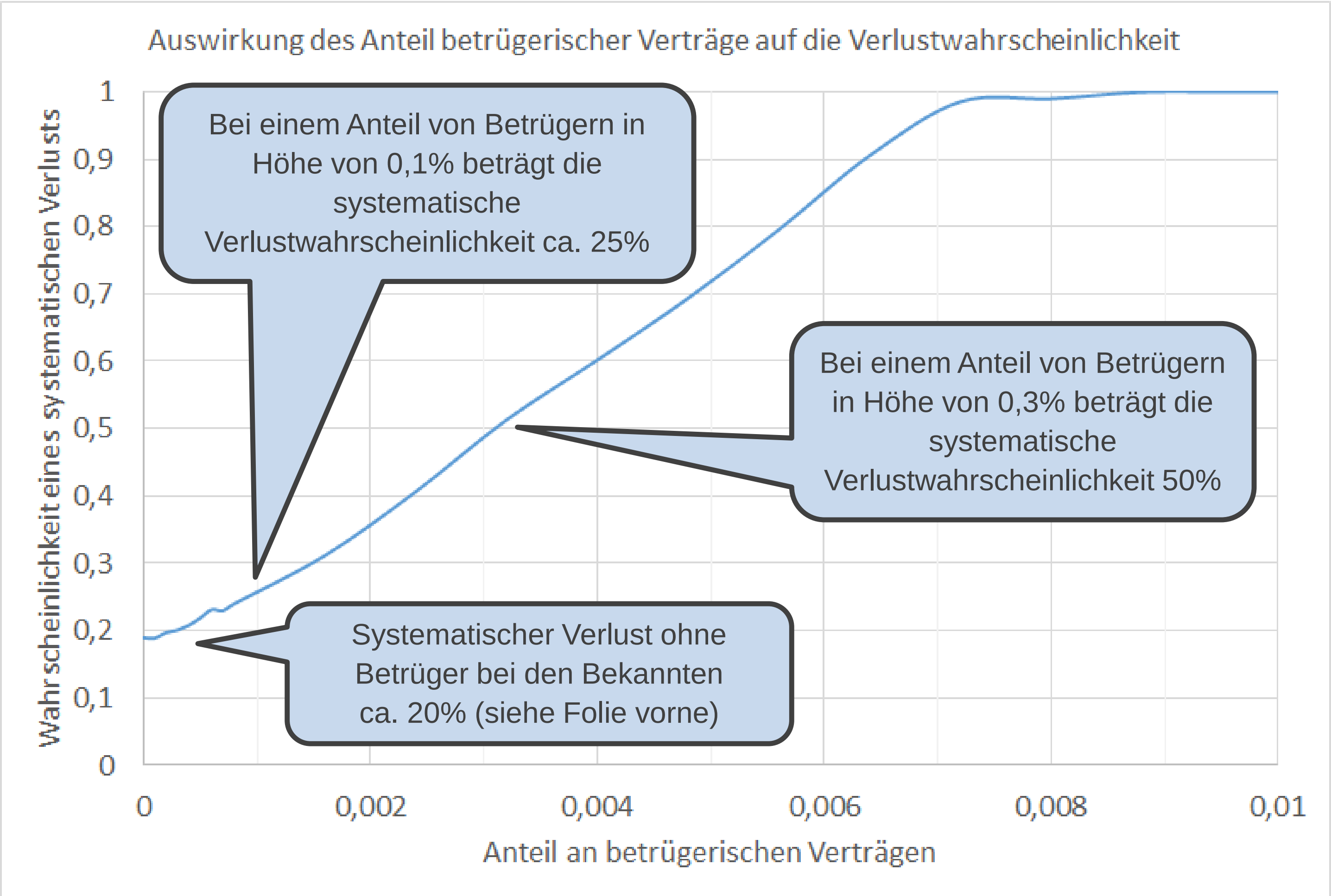
Die Zufallsvariable X_i repräsentiert die Wahlentscheidung des i-ten Wählers, der bei $X_i = 1$ für Kandidat A und $X_i = 0$ für Kandidat B gestimmt hat.

Kandidat A gewinnt dann die Wahl mit der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{998.000} X_i > 498.000\right) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{498.000 - 998.000/2}{\sqrt{998.000/4}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(-2{,}002) \approx 0{,}977, \end{aligned}$$

also mit einer relativ hohen Wahrscheinlichkeit.

Der Anteil von Verträge, die vorsätzlich einen Schaden verursachen, beeinflusst die systematische Verlustwahrscheinlichkeit stark.



Im aktuariellen Controlling müssen die bei der Produktentwicklung getroffenen Annahmen überprüft werden

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

- aufgrund der Unsicherheit ist ein zeitnahes aktuarielles Controlling wichtig
- dabei spielt die Schadenfrequenz (wie auf den vorherigen Folien dargestellt) eine wichtigere Rolle

- Das Produkt läuft nun bereits ein halbes Jahr mit 100 verstrichenen Jahreseinheiten und 19 Schäden. Wie ist dies zu bewerten?

Die Pearson-Clopper-Werte geben die obere und untere Schranke für den Schätzer des Parameters p einer Binomialverteilung an.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

- Es liegt eine Binomialverteilung mit n=100 und unbekannten p zugrunde und beobachteten Wert m=19 vor.
- Punktschätzer für p ist das beobachtete Verhältnis von Schäden zu Jahreseinheiten $\hat{p} = \frac{m}{n} = 19\%$.
- Zwischen Binomialverteilung und F-Verteilung gibt es folgende Beziehung:

Ist X B(n, p)-verteilt und F eine F-verteile Zufallsvariable mit 2(x+1), 2(n-x) Freiheitsgraden, dann gilt:

$$P(X < x) = 1 - P\left(F \leq \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{1-p}\right).$$

- Durch diese Beziehung lässt sich durch die Pearson-Clopper-Werte eine untere (p_1) und obere (p_2) Schranke für ein 1-α Konfidenzintervall bestimmen. Für α = 5% erhalten wir:

$$p_1 = \frac{m \cdot F_{2m,2(n-m+1);\alpha/2}}{n-m+1+m \cdot F_{2m,2(n-m+1);\alpha/2}} \approx 12{,}7\% \text{ und}$$

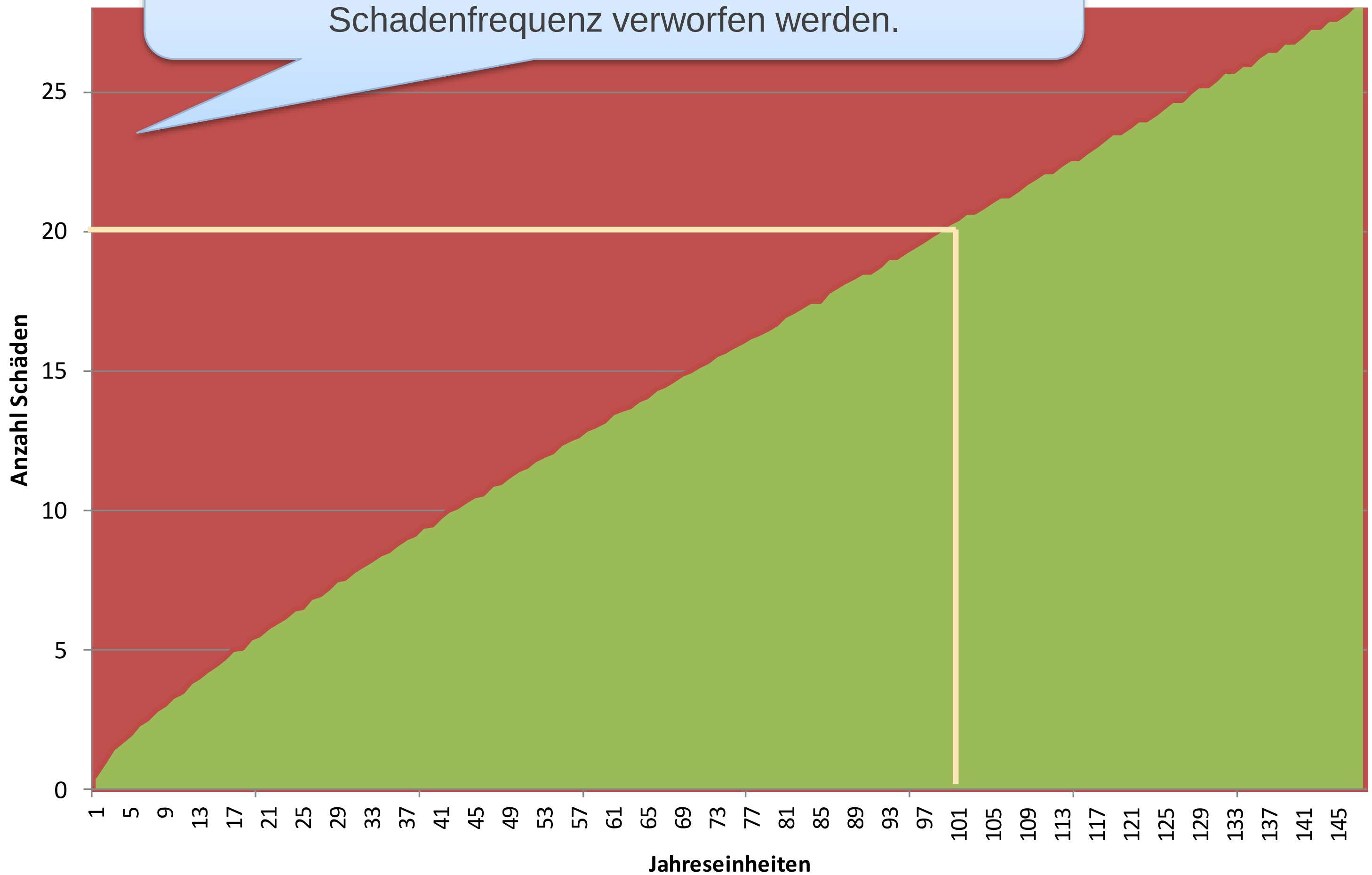
$$p_2 = \frac{(m+1) \cdot F_{2(m+1),2(n-m);1-\alpha/2}}{n-m+(m+1) \cdot F_{2(m+1),2(n-m);1-\alpha/2}} \approx 27{,}0\%.$$

➔ In diesem Fall kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% die Nullhypothese (p = 13,6%) nicht verworfen werden

Es kann in Abhängigkeit der Jahreseinheiten die Anzahl der Schäden berechnet werden, für die angenommene Schadenfrequenz in Frage gestellt werden kann.

ERGO Direkt
Versichern heißt verstehen.

Bei 20 oder mehr Schäden kann bei 100 Jahreseinheiten die Nullhypothese der bei der Kalkulation verwendeten Schadenfrequenz verworfen werden.



Eine Erweiterung der vorgestellten Modellierung kann zu weiteren Erkenntnissen führen

mögliche Modellerweiterungen

- Modellierung des Zufallfehlers
- Modellierung Gesamtschadenverteilung
- Abbildung von Abhängigkeiten (z.B. anwesende Personen und Eispreis)
- Unterstützung des aktuariellen Controllings

Mögliche Produkterweiterungen

- auch für bereits gekaufte Sonnenschirme
- es kann zwischen 1 und 2 Jahren Vertragslaufzeit gewählt werden
- Als Zusatzbaustein auch umgefallene Sonnenschirme (von Gartenbesitzern) außerhalb des Garten

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Dr. Daniel Hofmann

Leiter Aktuariat Sach/HUK

Tel 0911 / 148 – 2104
daniel.hofmann@ergodirekt.de