



WIRTSCHAFT  
HOCHSCHULE MAINZ  
UNIVERSITY OF  
APPLIED SCIENCES

# Szenariobasierte Risikomessung als Grundlage von Unternehmenssteuerung und Portfoliooptimierung

Prof. Dr. Sebastian Schlütter

Forum V-Versicherungsmathematisches Kolloquium an der  
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

21. Juli 2020

# Agenda

## Motivation und Forschungsfrage

### Korrelationsparameter in der Wurzelformel

- Konzepte
- Kalibrierung
- Fallstudie

### Orthogonale Szenarien

### Fazit

# Motivation - Fokus des heutigen Vortrags

Auszug aus den EIOPA-Leitlinien für die unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung

## **Leitlinie 7 – Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs**

1.19. Das Unternehmen sollte den Kapitalbedarf quantifizieren und die für die Adressierung aller wesentlichen Risiken benötigten sonstigen Mittel beschreiben, unabhängig davon, ob die Risiken quantifizierbar sind.

1.20. Gegebenenfalls sollte das Unternehmen die ermittelten wesentlichen Risiken einem ausreichend breiten Spektrum an Stresstests oder Szenarioanalysen unterziehen, um eine angemessene Grundlage für die Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs zu schaffen.

## **Leitlinie 13 – Verbindung zum strategischen Managementprozess und zu den Entscheidungsstrukturen**

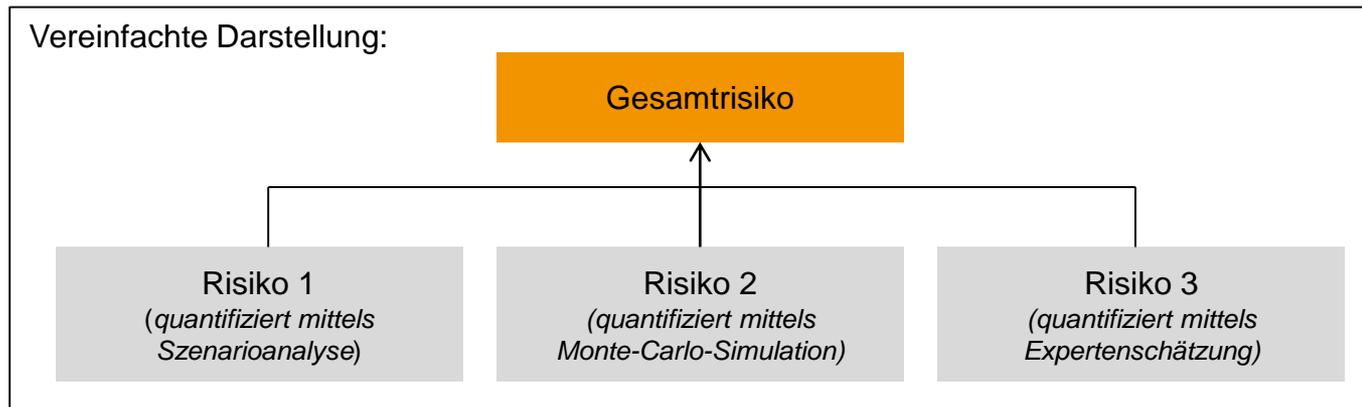
1.27. Das Unternehmen sollte die Ergebnisse der unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung und die während des Prozesses dieser Beurteilung gewonnenen Einblicke zumindest in folgenden Bereichen berücksichtigen:

- a) in seinem Kapitalmanagement;
- b) in seiner geschäftlichen Planung;
- c) bei der Entwicklung und Konzeption neuer Produkte.

# Motivation - Fokus des heutigen Vortrags

Erforderlich ist somit eine Vorgehensweise bei der

- die einzelnen Risiken anhand unterschiedlicher Methoden quantifiziert werden
- die Risikomessungen der Einzelrisiken zur Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs verwendet (also aggregiert) werden können
- die Risikomessung eine Grundlage für Steuerungsentscheidungen schafft



Inhalt des heutigen Vortrags:

- Wie kann die Risikoaggregation hierbei sinnvoll ausgestaltet werden?
- Wie lassen sich in diesem Kontext risikoübergreifende Szenarien gestalten?

Prämissen:

- Die Risikoaggregation soll deterministisch und in der Struktur der „Wurzelformel“ erfolgen
- Optimierung eines Portfolios bzw. eines Mehrspartenunternehmens durch Steuerung von Volumina
- Im Fokus steht eher eine unternehmensspezifische Kalibrierung als eine universelle Standardformel

# Literaturüberblick (1/2)

- Wurzelformel ist beliebt zur Aggregation von Risikomessungen (s. bspw. Hull 2018, Kap. 26.5)
- In Verbindung mit Pearson-Korrelationen kann sie das Gesamtrisiko falsch einschätzen (Pfeifer und Strassburger 2008, Li et al. 2015); gleiches gilt für Summation von Einzelrisiken (Li et al., 2015; Breuer et al. 2010)
- Auszug aus EIOPA (2014), „*The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation*“:

Because of these shortfalls of correlation technique and the relevance of such shortfalls for the risks covered in the standard formula, the choice of the correlation factors should avoid a mis-estimation of the aggregated risk. In particular, linear correlations are not an appropriate choice for the aggregation of risks in many circumstances.

In the standard formula, correlation parameters should be chosen in such a way as to achieve the best approximation of the 99.5% VaR for the aggregated capital requirement. In mathematical terms, this approach can be described as follows:

For two risks X and Y with  $E(X)=E(Y)=0$ , the correlation parameter  $\rho$  should minimize the following aggregation error:

$$|\text{VaR}(X + Y)^2 - \text{VaR}(X)^2 - \text{VaR}(Y)^2 - 2\rho \cdot \text{VaR}(X) \cdot \text{VaR}(Y)|$$

- VaR-implizierte Korrelationen:

$$\rho = \frac{\text{VaR}(X + Y)^2 - \text{VaR}(X)^2 - \text{VaR}(Y)^2}{2 \cdot \text{VaR}(X) \cdot \text{VaR}(Y)}$$

gehen auf Campbell et al. (2002) zurück und wurden durch Mitnik (2014) bzgl. einer simultanen Schätzung für mehr als zwei Risiken verallgemeinert („**State-of-the-Art**“)

# Literaturüberblick (2/2)

- Zur Optimierung eines Portfolios (bspw. Spartenstruktur eines Unternehmens anhand von RORAC) sind Sensitivitäten des Gesamtrisikos – unter Berücksichtigung von Diversifikationseffekten – relevant:
  - Sensitivitäten bzgl. Volumina (im Kontext homogener Risikomaße „Euler-Allokation“, s. Hull 2018, Kap. 26.6, Tasche 2008, Asimit et al., 2019; Boonen et al. 2017; im Kontext des DPO analog, siehe Myers/Read 2001, Erel et al., JFE 2015)
  - Sensitivitäten zweiter Ordnung (Buch et al. 2011)
- Steuerungsimpulse aus der Wurzelformel:
  - Chen et al. (JBF 2019) weisen empirisch nach, dass die Wurzelformel im US-amerikanischen “Risk-Based Capital” (RBC) marginale Kapitalanforderungen verfälscht abbildet. Insbesondere wird der marginale Kapitalbedarf für festverzinsliche Wertpapiere unterschätzt und Versicherer haben durch Fehlallokationen ihre Risikosituation verschlechtert
  - Braun et al. (JRI 2017) veranschaulichen, dass die Solvency-II-Standardformel zu Anlageportfolien abseits des effizienten Randes gemäß Markowitz’ Portfoliotheorie führen kann; eine Ursache ist die unzulängliche Abbildung von Diversifikationseffekten
  - Weitere Arbeiten zu Steuerungsimplicationen aus der Standardformel: Christiansen et al. (2012), Fischer und Schlütter (2015), Gatzert und Kosub (2017), Braun et al. (2018)

# Wurzelformel und marginale Kapitalbedarfe (1/3)

- **Beispiel:** Modulebene der Solvency II Standardformel:

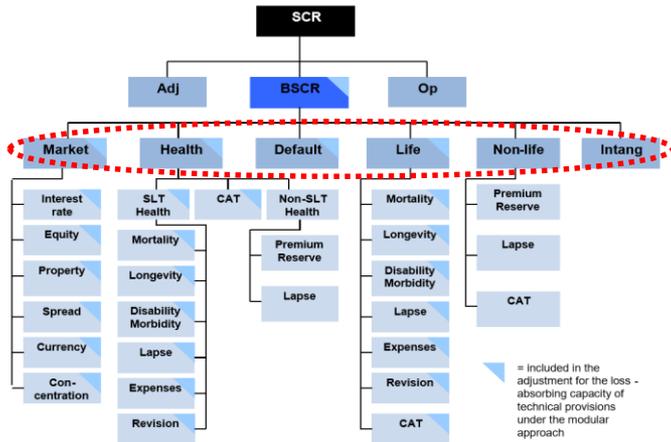


ABB. 18 – VERLUSTOBERGRENZEN UND GESAMTSOLVABILITÄTSBEDARF IM SEKTOR VERSICHERUNG

in Mio. €	Verlustobergrenze		Gesamtsolvabilitätsbedarf	
	31.12. 2018	31.12. 2017	31.12. 2018	31.12. 2017
Versicherungstechnisches Risiko Leben	1.100	1.200	884	868
Versicherungstechnisches Risiko Gesundheit	350	370	312	219
Versicherungstechnisches Risiko Nicht-Leben	3.650	3.580	3.247	3.001
Marktrisiko	4.350	3.800	4.343	3.240
Gegenparteausfallrisiko	100	130	79	57
Operationelles Risiko	640	650	558	528
Nicht beherrschte Versicherungsunternehmen und Unternehmen aus anderen Finanzsektoren	145	140	104	127
<b>Summe (nach Diversifikation)</b>	<b>5.700</b>	<b>5.420</b>	<b>5.125</b>	<b>4.199</b>

Korrelationsparameter auf Ebene der Module:

	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	1	0.25	0.25	0.25	0.25
Default	0.25	1	0.25	0.25	0.5
Life	0.25	0.25	1	0.25	0
Health	0.25	0.25	0.25	1	0
Non-Life	0.25	0.5	0	0	1

$= R$

R+V Gruppe, 31.12.2018  
(in Mio. EUR)

Module	SCR
Market	4343
Default	79
Life	884
Health	312
Non-life	3247
Pre Diversifikation	8865

$= X$

Nach Diversifikation:

$$\sqrt{x^T R x} = 6368$$

Diversifikationseffekt:

$$\frac{6368}{8865} - 1 = -28\%$$

# Wurzelformel und marginale Kapitalbedarfe (2/3)

- Marginale Kapitalbedarfe sind essentiell zur Portfolioanalyse.

Grundgedanke: *Wie verändert sich der diversifizierte Kapitalbedarf, wenn das Exposure zu einem Risiko (bspw. Versicherungstechnik Nichtleben) marginal ausgeweitet wird?*

- Definiere die Funktion (vgl. bspw. Gouriéroux et al. 2000, Tasche 2008)

$$g: u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{(u \circ x)^T R (u \circ x)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho_{i,j} u_i x_i u_j x_j}$$

- Sensitivität des diversifizierten Kapitalbedarfs bzgl. Exposure zu Risiko  $k$ :

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u_k} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_{i,k} u_i x_i}{\sqrt{(u \circ x)^T R (u \circ x)}} x_k$$

- Aus Eulers Theorem über homogene Funktionen folgt

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial g(u)}{\partial u_k} \Bigg|_{u=(1,\dots,1)^T} = \sqrt{x^T R x}$$

# Wurzelformel und marginale Kapitalbedarfe (3/3)

- Beispiel (Forts.):

Module	SCR	Euler allocation	Diversification benefit
Market	4343	3733	-14%
Default	79	38	-52%
Life	884	287	-68%
Health	312	80	-74%
Non-life	3247	2229	-31%
	8865	6368	-28%

	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	1	0.25	0.25	0.25	0.25
Default	0.25	1	0.25	0.25	0.5
Life	0.25	0.25	1	0.25	0
Health	0.25	0.25	0.25	1	0
Non-Life	0.25	0.5	0	0	1

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u_k} \Big|_{u=(1,\dots,1)^T} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_{i,k} x_i}{\sqrt{x^T R x}} x_k$$

$$= \frac{0.25 \cdot 4343 + 0.5 \cdot 79 + 0 \cdot 884 + 0 \cdot 312 + 1 \cdot 3247}{6368} \cdot 3247$$

$$= 2229$$



Korrelationsparameter beeinflussen Euler-Kapitalallokation

# Forschungsfrage

Ziel: Kalibrierung der Wurzelformel für ein gegebenes Unternehmen bzw. Portfolio

Ist es möglich, die Wurzelformel so zu kalibrieren, dass sie die Steuerungssignale einer gegebenen „wahren“ Verteilung wiedergibt?

## Risikomessung mit wahrer Verteilung

$$f: u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \rightarrow \varrho \left( \sum_{i=1}^n u_i X_i \right) - E \left[ \sum_{i=1}^n u_i X_i \right]$$

Sensitivitäten erster Ordnung (“Euler-Allokation”)

$$\left. \frac{\partial f(u)}{\partial u_k} \right|_{u=(1,\dots,1)^T}$$

Sensitivitäten zweiter Ordnung

$$\left. \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u_k \partial u_l} \right|_{u=(1,\dots,1)^T}$$

## Risikomessung mit Wurzelformel

$$g: u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho_{i,j} u_i x_i u_j x_j}$$

$$\left. \frac{\partial g(u)}{\partial u_k} \right|_{u=(1,\dots,1)^T}$$

$$\left. \frac{\partial^2 g(u)}{\partial u_k \partial u_l} \right|_{u=(1,\dots,1)^T}$$

Technische Annahmen:

- $\varrho$  ist homogen (bspw. Value-at-Risk oder Tail Value-at-Risk)
- $f$  ist zwei mal stetig differenzierbar

# Agenda

Motivation – Wurzelformel und marginale Kapitalbedarfe

## Korrelationsparameter in der Wurzelformel

- Konzepte
- Kalibrierung
- Fallstudie

Orthogonale Szenarien

Fazit

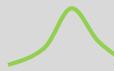
# Korrelationsparameter der Wurzelformel

**Pearson-Korrelation**

**VaR-implizierte Korrelation**  
(Campbell et al. 2002;  
Mittnik, 2014)

**„Sensitivitäts-implizierte“  
Korrelation**  
(Paulusch und Schlütter, 2019)

## Fall 1: Elliptische Verteilungen

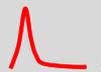
 Symmetrische  
Randverteilung

 Lineare  
Abhängigkeiten

Eigenschaften:

Alle drei Konzepte führen zu identischen Parametern;  
Wurzelformel misst das Risiko aller Portfolien korrekt  
(s. McNeil et al. 2015)

## Fall 2: Nicht-elliptische Verteilungen

 Schiefe  
Randverteilung

 Tail-  
Abhängigkeiten

Eigenschaften:

Korrekt abgebildete Portfolien  
(im allg.)

Keine (s. bspw. Pfeifer und  
Strassburger, 2008), außer  
Einzelrisiken

$n^*(n-1)/2$  Kalibrierungsportfolien  
sowie alle Einzelrisiken

Ein Kalibrierungsportfolio

Korrekte Abbildung von  
Sensitivitäten erster Ordnung

Nein

Nein

Ja

Korrekte Abbildung von  
Sensitivitäten zweiter Ordnung

Nein

Nein

Ja

# Konzepte

- VaR-implizierte Korrelation (vgl. Campbell et al., 2002; EIOPA 2014):

- Idee: Finde Korrelationsparameter sodass  $f(u) = g(u)$
- $n = 2, u = (1,1)^T$ :

$$\sqrt{x_1^2 + 2\rho_{1,2}x_1x_2 + x_2^2} = \text{VaR}_{1-\alpha}(X_1 + X_2)$$

$$\Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{(\text{VaR}_{1-\alpha}(X_1+X_2))^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1x_2}$$

- Für  $n > 2$ : Verallgemeinerung durch Mittnik (2014)

- Sensitivitäts-implizierte Korrelation (Paulusch und Schlütter, 2019):

- Betrachten hier der Einfachheit halber nur  $n = 2, u = (1,1)^T$ :

$$\sqrt{x_1^2 + 2\rho_{1,2}x_1x_2 + x_2^2} = \text{VaR}_{1-\alpha}(X_1 + X_2)$$

$$\Rightarrow x_1^2 + 2\rho_{1,2}x_1x_2 + x_2^2 = (\text{VaR}_{1-\alpha}(X_1 + X_2))^2$$

$$\Rightarrow 2\rho_{1,2} = \frac{\partial^2 (\text{VaR}_{1-\alpha}(X_1+X_2))^2}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\text{VaR}_{1-\alpha}(X_1+X_2))^2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2x_1x_2} \frac{\partial^2 (\text{VaR}_{1-\alpha}(u_1X_1+u_2X_2))^2}{\partial u_1 \partial u_2} \Bigg|_{u=(1,1)^T}$$

# Beispiel

- Situation:

- Betrachte n=2 unabhängige gammaverteilte Risiken mit  $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 1$ ,  $\text{Var}(X_1) = 2$  und  $\text{Var}(X_2) = 0,5$ .
- Stand-alone Kapitalanforderungen:

$$x = \begin{pmatrix} 6,879 \\ 2,715 \end{pmatrix}$$

- Wahre aggregierte Kapitalanforderung (analytische Berechnung möglich, siehe Moschopoulos 1985):

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{VaR}_{99,5\%}(X_1 + X_2) = 7,0565$$

- Wahre Euler-Allokation:

$$\left. \frac{\partial f(u)}{\partial u_k} \right|_{u=(1,\dots,1)^T} = \begin{pmatrix} 6,6523 \\ 0,4042 \end{pmatrix}$$

- Kalibrierung und Ergebnisse der Wurzelformel:

## VaR-implizierte Korrelation

- Kalibrierung: Der Ansatz

$$\rho = \frac{7,0565^2 - 6,879^2 - 2,715^2}{2 \cdot 6,879 \cdot 2,715} = -0,1313$$

ergibt

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0,1313 \\ -0,1313 & 1 \end{pmatrix}$$

- Euler-Allokation:

$$\left. \frac{\partial g(u)}{\partial u_k} \right|_{u=(1,\dots,1)^T} = \frac{(Rx) \circ x}{\sqrt{x^T Rx}} = \begin{pmatrix} 6,3593 \\ 0,6972 \end{pmatrix}$$

Fehler:  
-4,4% (Risiko 1)  
+72,5% (Risiko 2)

## Sensitivitäts-implizierte Korrelation

- Kalibrierung: Der Ansatz

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2x_i x_j} \left. \frac{\partial^2 (\text{VaR}_{99,5\%}(u_1 X_1 + u_2 X_2))^2}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{u=(1,1)^T}$$

ergibt:

$$R = \begin{pmatrix} 1,0244 & -0,0824 \\ -0,0824 & 0,5958 \end{pmatrix}$$

- Euler-Allokation:

$$\left. \frac{\partial g(u)}{\partial u_k} \right|_{u=(1,\dots,1)^T} = \frac{(Rx) \circ x}{\sqrt{x^T Rx}} = \begin{pmatrix} 6,6523 \\ 0,4042 \end{pmatrix}$$

korrekt

# Theorem zu „Sensitivitätsimplizierten Korrelationen“

- Definiere

$$g: u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho_{i,j} u_i x_i u_j x_j}$$

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2x_i x_j} \frac{\partial^2 (f(u))^2}{\partial u_i \partial u_j} \Bigg|_{u=(1,\dots,1)^T}$$

Es gilt

- $g(1, \dots, 1) = f(1, \dots, 1)$
- $\frac{\partial}{\partial u_k} g(1, \dots, 1) = \frac{\partial}{\partial u_k} f(1, \dots, 1)$  für alle  $k = 1, \dots, n$
- $\frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_l} g(1, \dots, 1) = \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_l} f(1, \dots, 1)$  für alle  $k, l = 1, \dots, n$

# Agenda

Motivation – Wurzelformel und marginale Kapitalbedarfe

## Korrelationsparameter in der Wurzelformel

- Konzepte
- **Kalibrierung**
- Fallstudie

Orthogonale Szenarien

Fazit

# 1.) Kalibrierung VaR-implizierter Korrelationen

- Beispiel: Kalibrierung der Matrix  $R$  für drei Risiken

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \rho_{1,2} & 1 & \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 \end{pmatrix}$$

- Vorschlag von Mitnik (2014):

Betrachte (mindestens) drei linear unabhängige Portfolios  $u_1, u_2, u_3$ .

Wähle die drei Korrelationsparameter so, dass der mittlere quadrierte Fehler der Wurzelformel minimal wird:

$$\sum_{i=1}^3 (f(u_i) - g(u_i))^2 \rightarrow \min$$

Bspw:  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; Risikomaß 99,5%-Value-at-Risk

Herausforderung: Wir benötigen zur Kalibrierung die  $f(u_i)$  bzw.  $\text{VaR}_{99,5\%}(X_1 + X_2 + X_3)$ ,  $\text{VaR}_{99,5\%}(X_1 + X_2)$  und  $\text{VaR}_{99,5\%}(X_1 + X_3)$

Mögliche Vorgehensweisen zur Schätzung:

- i. Aus historischen Daten
- ii. Annahme von Randverteilungen und einer Pearson-Korrelationsmatrix (bzw. Copula) und anschließender Monte-Carlo-Simulation

## 2.) Kalibrierung sensitivitätsimplizierter Korrelationen

- Ziel: Ermittlung von

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2x_i x_j} \frac{\partial^2 (f(u))^2}{\partial u_i \partial u_j} \Bigg|_{u=(1,\dots,1)^T}$$

- Ausgangspunkt ist so wie bei Vorgehensweise ii. der Vorseite, d.h. wir nehmen eine multivariate Verteilung an.
- Von hier aus sind zwei Wege möglich:
  - a. Wir ermitteln  $f(u)$  anhand von Monte-Carlo-Simulationen. Sensitivitäten werden numerisch ermittelt. Es wird also  $f(1, \dots, 1), f(1 + h, \dots, 1)$ , etc. aus der Simulation geschätzt.  
Zur Schätzung von Sensitivitäten erster Ordnung kann ggf. auf bestehende Methoden zurückgegriffen werden (s. bspw. Hong und Liu 2009 für Sensitivitäten des Conditional VaR)
  - b. Furman et al. (2019) schlagen die sogenannte Mixed-Gamma-Verteilung vor, welche praktisch jede multivariate Verteilung beliebig genau approximieren kann. Die Mixed-Gamma-Verteilung erlaubt eine analytische Darstellung von  $\text{VaR}_{1-\alpha}(\sum_{k=1}^n u_k X_k)$ , welche numerisch abgeleitet werden kann.

# Agenda

Motivation – Wurzelformel und marginale Kapitalbedarfe

## Korrelationsparameter in der Wurzelformel

- Konzepte
- Kalibrierung
- Fallstudie

Orthogonale Szenarien

Fazit

# Anwendung: EVA-Maximierung

- $n$  Sparten
- Schadenaufwand von Sparte  $i$ :  $u_i X_i$
- $X_i$  sind unabhängige gammaverteilte Risiken
- Isoelastische Versicherungsnachfragefunktion:

$$u_i(p_i) = n_i \cdot p_i^{\varepsilon_i} \quad \text{d.h.} \quad p_i(u_i) = \left(\frac{u_i}{n_i}\right)^{1/\varepsilon_i}$$

- Zielfunktion:

$$EVA(u_1, \dots, u_n) = \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i \cdot (p_i(u_i) - E[X_i])}_{\text{Erwarteter Gewinn}} - r_h \cdot \text{VaR}_{99.5\%} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i \cdot X_i}_{\text{aggregierter VaR}} \right) \rightarrow \max$$

- Sei  $r_h = 5\%$  und  $\varepsilon_i = -9$  für alle Sparten
- $n_i$  sind so kalibriert, dass  $u_1 = \dots = u_n = 1$  für den wahren aggregierten VaR optimal ist

Analyse: Was ist das EVA-maximierende Portfolio falls der aggregierte VaR bestimmt wird anhand der

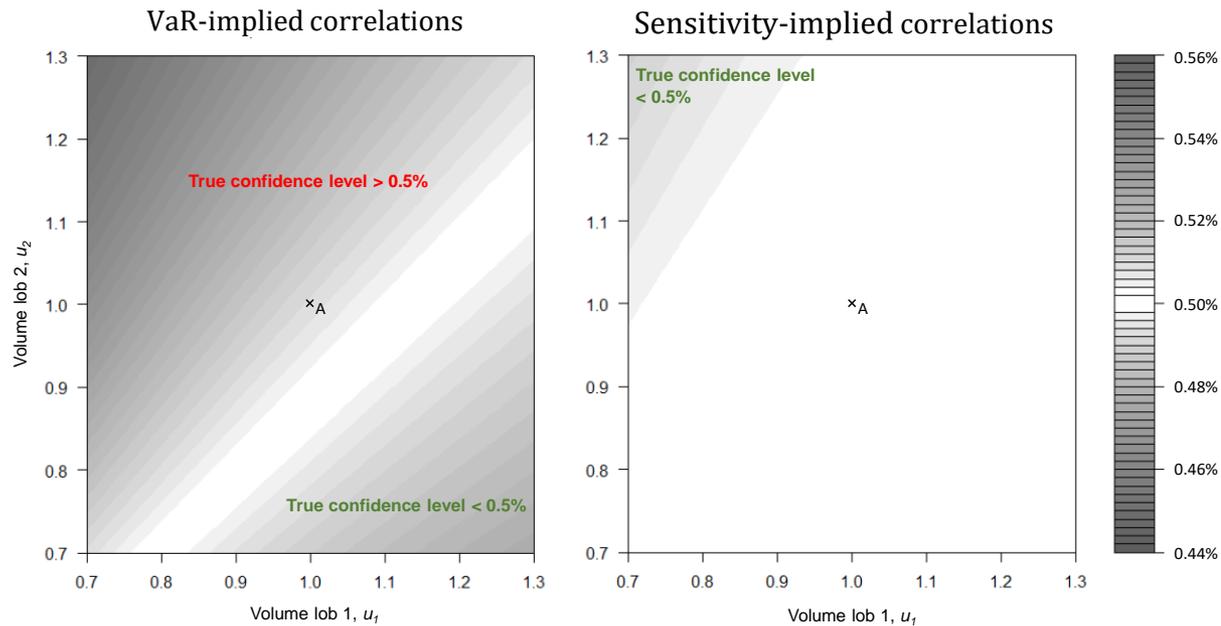
- wahren multivariaten Verteilung
- Wurzelformel mit VaR-implizierten Korrelationen
- Wurzelformel mit sensitivitäts-implizierten Korrelationen

# Szenario 1: Relevanz der Ableitungen erster Ordnung

- $n = 2$  Sparten mit  $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 1$ ,  $\text{Var}(X_1) = 2$  und  $\text{Var}(X_2) = 0,5$ .
- Bestimme den 99.5% VaR im EVA anhand der Wurzelformel:

Type of $R$	$R$ calibrated at		Optimal volumes		Optimal premiums		True Confidence Level
	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	$p_1$	$p_2$	
sensi.-impl.	1.0	1.0	1.000	1.000	1.499	1.148	0.500%
VaR-impl.	1.0	1.0	1.062	0.929	1.489	1.157	0.509%
sensi.-impl.	0.9	1.1	0.995	1.006	1.500	1.147	0.500%
VaR-impl.	0.9	1.1	1.067	0.947	1.488	1.155	0.524%
sensi.-impl.	0.8	1.2	0.975	1.026	1.504	1.144	0.496%
VaR-impl.	0.8	1.2	1.073	0.965	1.488	1.152	0.540%

# Szenario 1: Robustheit bzgl. Kalibrierungsportfolio



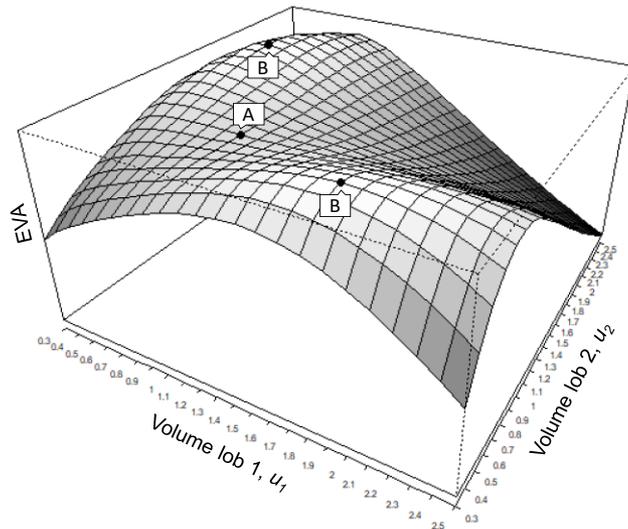
Für alle betrachteten Kalibrierungsportfolios ist das Konfidenzniveau bei sensitivitätsimplizierten Korrelationen näher an  $\alpha$  als bei VaR-implizierten Korrelationen

# Szenario 2: Relevanz der Ableitungen zweiter Ordnung

- $n = 3$  Sparten,  $(X_1, X_2, X_3)$  folgen gemischter Gammaverteilung mit Parametern

$i$	$\vartheta_i$	$\gamma_{k_1}$	$\gamma_{k_2}$	$\gamma_{k_3}$
1	0.5	0.5	9.5	0.5
2	0.5	0.5	0.5	9.5
3	0.5	0.5	4.5	4.5
$p_{\kappa}$		0.99	0.005	0.005

- $n_i$  sind so kalibriert, dass  $u_1 = u_2 = u_3 = 1$  für den wahren aggregierten VaR optimal ist
- Wir fixieren  $u_3 = 1$  sodass  $u_1$  und  $u_2$  die einzigen Entscheidungsvariablen sind
- EVA-Funktion für wahren aggregierten VaR:



$$H_u f(u) = \begin{pmatrix} -3.850 & 3.632 & 0.218 \\ 3.632 & -3.850 & 0.218 \\ 0.218 & 0.218 & -0.437 \end{pmatrix}$$

# Szenario 2: Relevanz der Ableitungen zweiter Ordnung

- Benchmark-Ansatz zur Kalibrierung der Wurzelformel: Bestimme Korrelationsparameter, sodass Wurzelformel die wahre Eulerkapitalallokation liefert
- Angenommen  $R$  ist symmetrisch und **hat Einsen auf der Diagonalen**, gibt es drei freie Parameter:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 \end{pmatrix}$$

- Ziel: Wurzelformel soll die wahre Eulerkapitalallokation liefern:

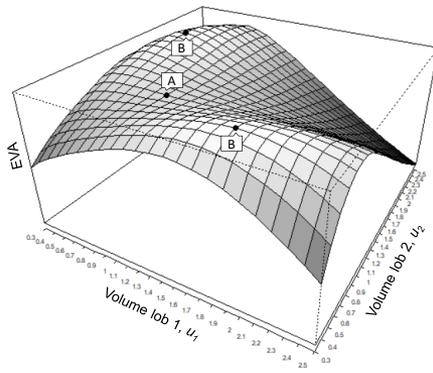
$$\left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f(u)}{\partial u_3} \end{pmatrix} \right|_{u=(1,\dots,1)^T} = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial g(u)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g(u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g(u)}{\partial u_3} \end{pmatrix} \right|_{u=(1,\dots,1)^T}$$

- Eindeutige Lösung für  $R$ :

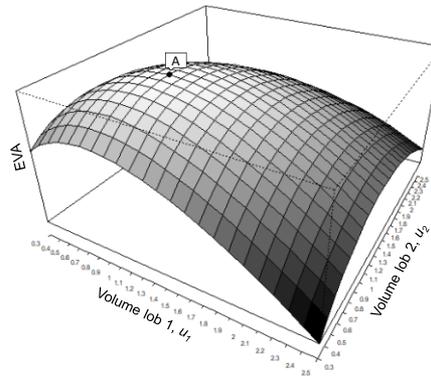
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.374 & 0.585 \\ 0.374 & 1 & 0.585 \\ 0.585 & 0.585 & 1 \end{pmatrix}$$

# Szenario 2: Relevanz der Ableitungen zweiter Ordnung

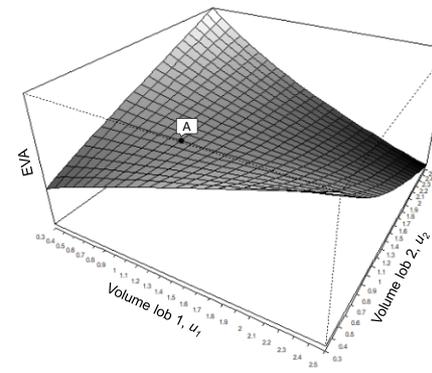
Wahrer VaR



Wurzelformel,  
R mit Einsen  
auf Diagonalen



Wurzelformel,  
sensitivitäts-implizierte  
Korrelationen



$$R = \begin{pmatrix} -0.181 & 1.421 & 0.748 \\ 1.421 & -0.181 & 0.748 \\ 0.748 & 0.748 & 0.606 \end{pmatrix}$$

# Agenda

Motivation – Wurzelformel und marginale Kapitalbedarfe

Korrelationsparameter in der Wurzelformel

- Konzepte
- Kalibrierung
- Fallstudie

Orthogonale Szenarien

Fazit

# Szenariobasierte Risikomessung

- Angenommen, das wahre Risiko ist in Abhängigkeit von Volumina wie folgt gegeben:

$$f: u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \rightarrow \varrho \left( \sum_{i=1}^n u_i X_i \right)$$

Risikomaß  $\varrho$  ist homogen, bspw. VaR oder TVaR

- Anstelle von  $f(u)$  (oder ergänzend) soll eine szenariobasierte Risikomessung  $g(u)$  erfolgen (aus Gründen der besseren Transparenz bzw. Kommunizierbarkeit, zur Validierung, etc.)
- Forschungsfrage: Wie sind die Szenarien zu gestalten, sodass  $g(u)$  das wahre Risiko  $f(u)$  möglichst gut widerspiegelt?

# Bestehende Ansätze zur Szenarioanalyse

- Ein Szenario ist ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , der Realisationen des Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)^T$  widerspiegelt; entsprechend ist  $x^T u$  der Verlust des Portfolios mit Gewichten  $u$  bei Eintritt des Szenarios

- Least Solvent Likely Event („LSLE“, McNeil und Smith, 2012):

- Zunächst wird eine Menge möglicher Szenarien definiert:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T u \geq \varrho \left( \sum_{i=1}^n u_i X_i \right) \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^n \right\}$$

- Für ein Portfolio  $u \in \mathbb{R}^n$  ist das LSLE wie folgt definiert:

$$x_{LSLE} = \operatorname{argmax}_{x \in S} x^T u$$

- Angenommen, dass  $f(u) = \varrho(\sum_{i=1}^n u_i X_i)$  differenzierbar ist, gilt  $x_{LSLE} = \nabla f(u)$

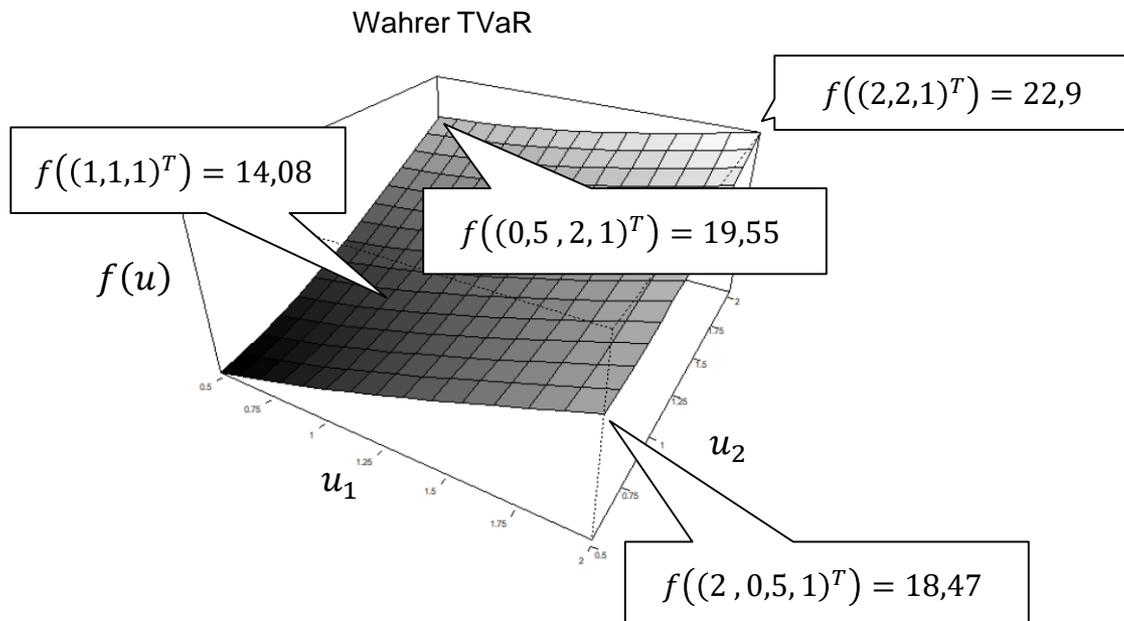
- Die Risikomessung mittels LSLE erfolgt per  $g^{LSLE}(u) = x_{LSLE}^T \cdot u$

- Hauptkomponentenanalyse („PCA“, s. bspw. Hull, 2018): Identifiziere Szenarien  $x_1, x_2, \dots, x_m$  mittels Spektralzerlegung der Kovarianzmatrix von  $(X_1, \dots, X_n)^T$  und aggregiere die entsprechenden Verluste wie folgt:

$$g^{PCA}(u) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j^T u)^2}$$

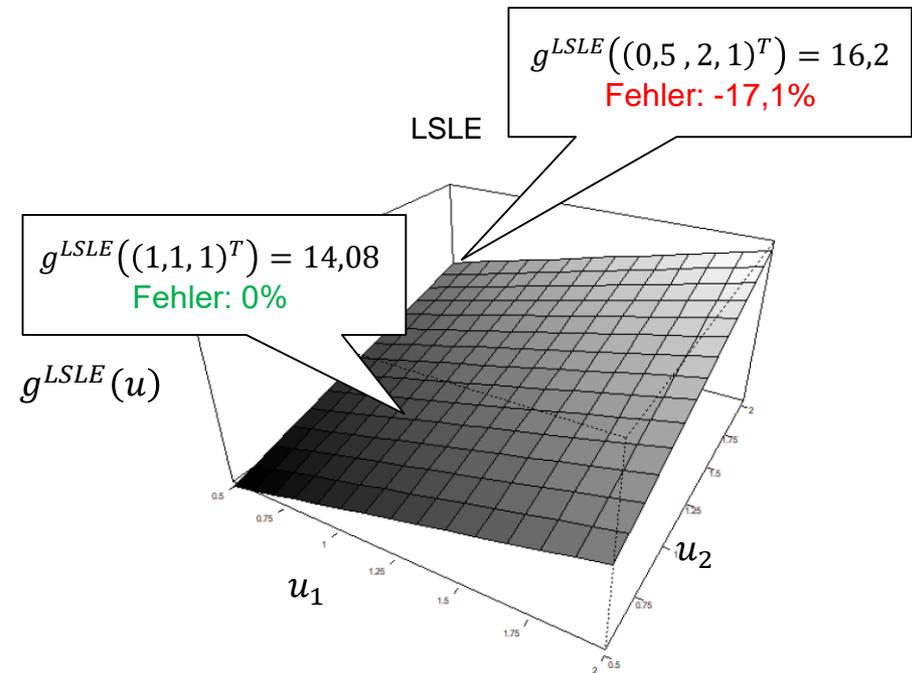
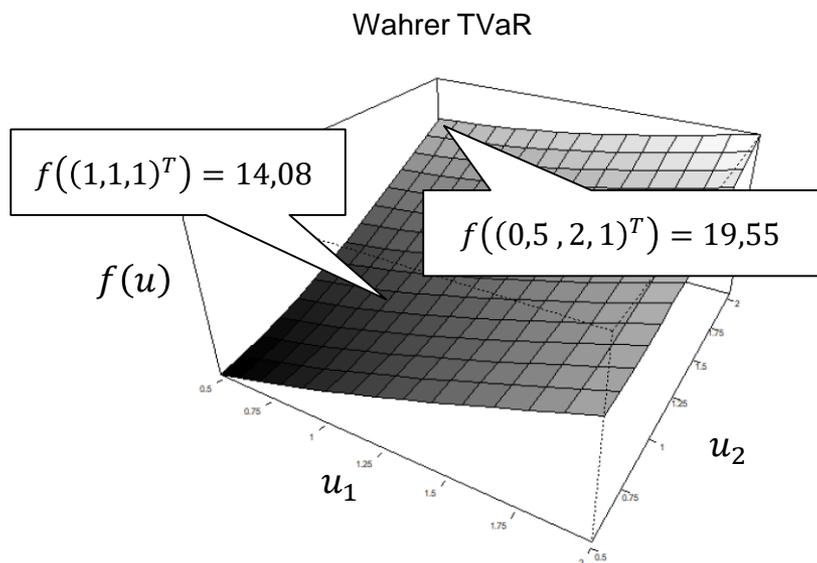
# Beispiel

- Betrachte den Zufallsvektor  $(X_1, X_2, X_3)^T$ , alle Randverteilungen sind zentriert sodass  $E[X_i] = 0$ 
  - $X_1$  ist lognormalverteilt mit Standardabweichung 2,15
  - $X_2$  ist gammaverteilt mit Standardabweichung 2,82
  - $X_3$  ist normalverteilt mit Standardabweichung 4
- Gauß-Copula mit Korrelationsmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ -0,25 & 1 & \\ 0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Risikomessung:  $f(u) = TVaR_{95\%}(\sum_{i=1}^3 u_i X_i)$ .
- Ausgehend von  $u = (1,1,1)^T$  erwägt das Unternehmen Änderungen der Exposures bzgl. Risiko 1 bzw. 2



# Beispiel – LSLE gemäß McNeil und Smith

- LSLE-Szenario:  $x = \begin{pmatrix} 3,97 \\ 4,11 \\ 6,00 \end{pmatrix}$
- Somit  $g^{LSLE}(u) = \begin{pmatrix} 3,97 \\ 4,11 \\ 6,00 \end{pmatrix}^T \cdot u = 3,97u_1 + 4,11u_2 + 6,00u_3$

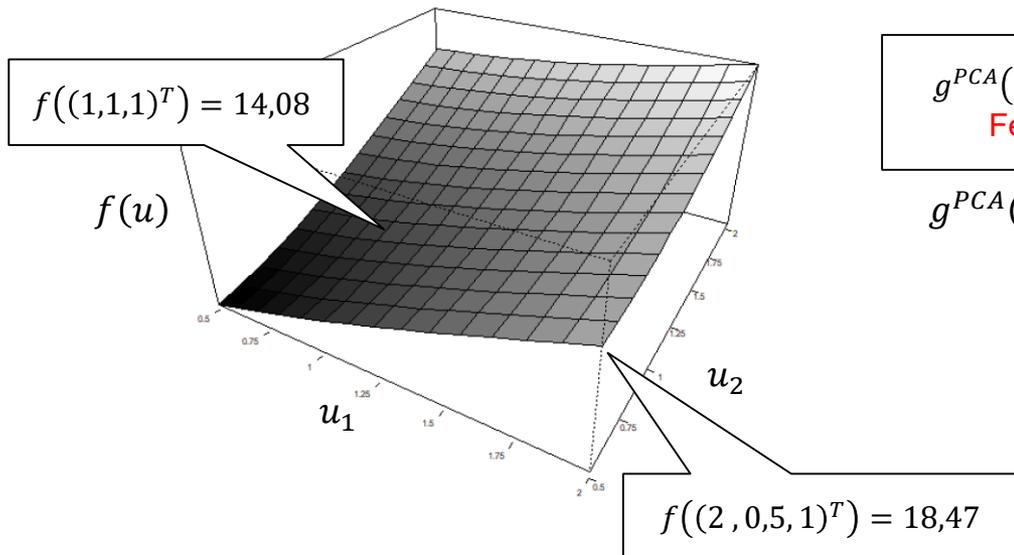


# Beispiel – PCA

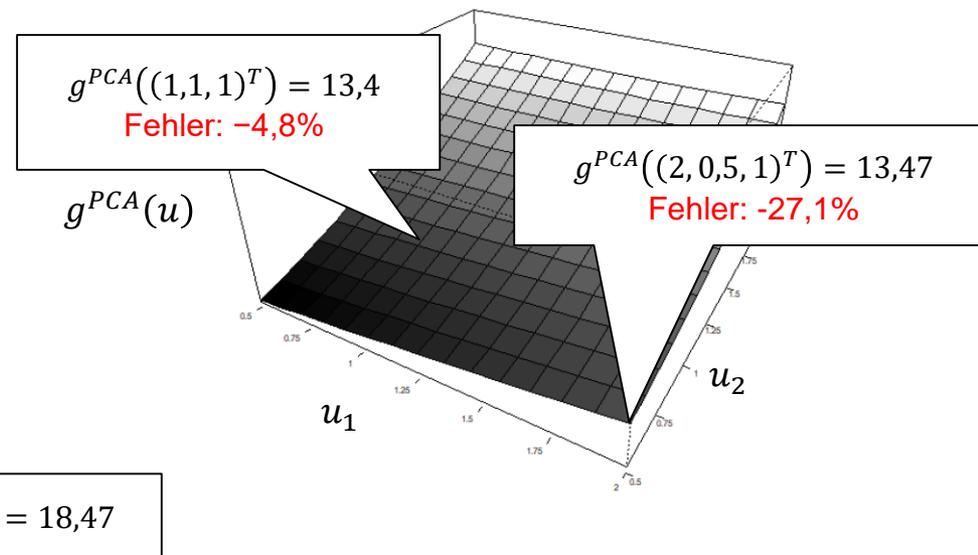
- Risikomessung gemäß PCA (erste zwei Hauptkomponenten):

$$g^{PCA}(u) = \sqrt{\left( \begin{pmatrix} 2,49 \\ -0,26 \\ 8,48 \end{pmatrix}^T \cdot u \right)^2 + \left( \begin{pmatrix} -1,66 \\ 8,95 \\ 0,77 \end{pmatrix}^T \cdot u \right)^2}$$

Wahrer TVaR



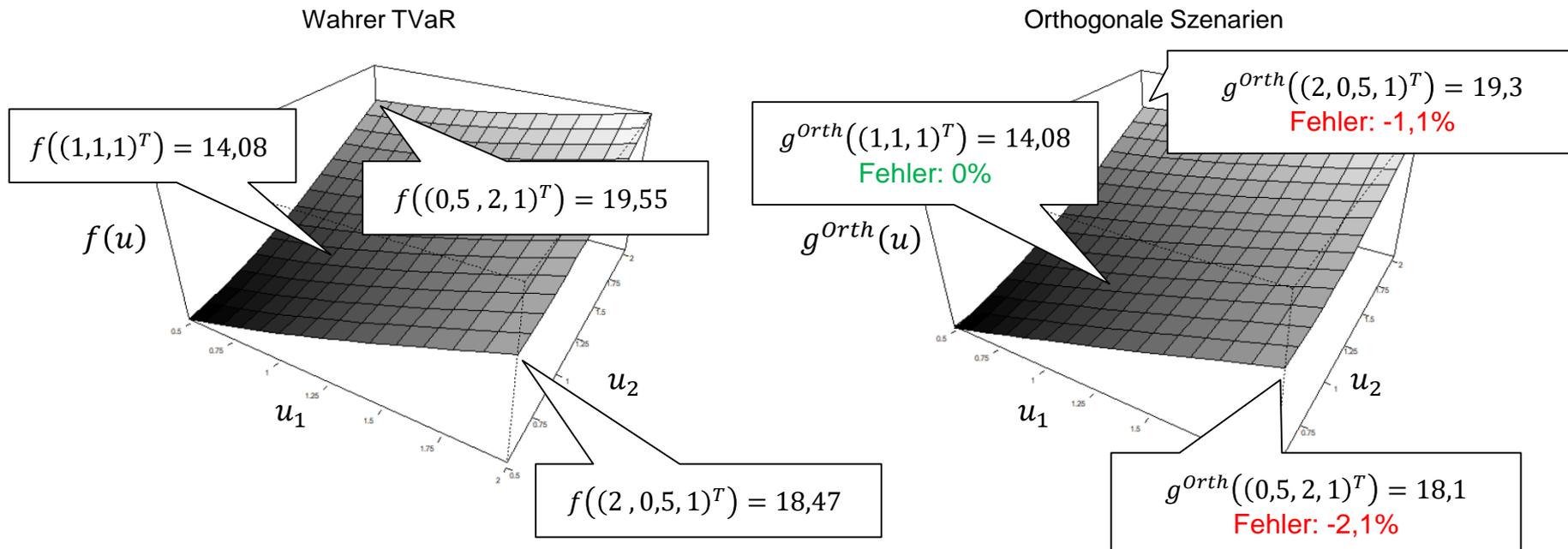
PCA



# Beispiel – Orthogonale Szenarien gemäß Aigner/Schlütter

- Risikomessung mit zwei orthogonalen Szenarien:

$$g^{Orth}(u) = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 5,73 \\ -2,36 \\ 7,36 \end{pmatrix}^T \cdot u\right)^2 + \left(\begin{pmatrix} -0,61 \\ 9,12 \\ 0,60 \end{pmatrix}^T \cdot u\right)^2}$$



# Risikomessung mittels Szenarien

**LSLE**  
(McNeil und Smith, 2012)

**PCA**  
(s. bspw. Hull, 2018)

**Orthogonale Szenarien auf Basis sensitivitäts-implizierter Korrelationen**  
(Aigner und Schlütter, 2020)

## Fall 1: Elliptische Verteilungen

### Eigenschaften:

Korrekt abgebildete Portfolien (im allg.)

Das Kalibrierungsportfolio

Ja, sofern alle Hauptkomponenten einbezogen werden; andernfalls Approximation

Das Kalibrierungsportfolio

Korrekte Abbildung von Sensitivitäten erster Ordnung

Ja

Ja

Korrekte Abbildung von Sensitivitäten zweiter Ordnung

Nein

Ja, für alle Richtungsvektoren in der linearen Hülle der Szenarien

## Fall 2: Nicht-elliptische Verteilungen

### Eigenschaften:

Korrekt abgebildete Portfolien (im allg.)

Das Kalibrierungsportfolio

Nein

Das Kalibrierungsportfolio

Korrekte Abbildung von Sensitivitäten erster Ordnung

Ja

Nein

Ja

Korrekte Abbildung von Sensitivitäten zweiter Ordnung

Nein

Nein

Ja, für alle Richtungsvektoren in der linearen Hülle der Szenarien

# Vorschlag: Orthogonale Szenarien auf Basis sensitivitäts-implizierter Korrelationen

## PCA

- Gewichtungsvektoren  $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n$  als Eigenvektoren der Kovarianzmatrix  $\Sigma$ ; somit sind die Zufallsvariablen  $\tilde{X}_j = \sum_{i=1}^n w_{i,j} X_i$  orthogonal sind im Sinne der Kovarianz:

$$\langle \tilde{X}_k, \tilde{X}_l \rangle = \text{cov}(\tilde{X}_k, \tilde{X}_l)$$

- Bestimme Risikogewichte:

$$x_j^{PCA} = f(w_j) \cdot \frac{w_j^T \Sigma}{w_j^T \Sigma w_j}$$

- Aggregiere die Szenarioverluste wie folgt:

$$g^{PCA}(u) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( (x_j^{PCA})^T \cdot u \right)^2}$$

## Vorschlag: Orthogonale Szenarien

- Suche Gewichtungsvektoren  $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n$ , sodass die Zufallsvariablen  $\tilde{X}_j = \sum_{i=1}^n w_{i,j} X_i$  orthogonal sind im Sinne der Bilinearform

$$\langle \tilde{X}_k, \tilde{X}_l \rangle = \frac{\partial^2}{\partial h_k \partial h_l} \left. \left( \sum_{i=1}^n X_i + h_k \tilde{X}_k + h_l \tilde{X}_l \right)^2 \right|_{h_k=h_l=0}$$

und sodass  $\mathbb{1}_n \in \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$

- Bestimme Risikogewichte:

$$x_j^{Orth} = f(w_j) \cdot \frac{w_j^T H}{w_j^T H w_j} \cdot \sqrt{\frac{w_j^T H w_j}{(f(w_j))^2}}$$

- Aggregiere die Szenarioverluste wie folgt:

$$g^{Orth}(u) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( (x_j^{AS})^T \cdot u \right)^2}$$

- Im elliptischen Fall sind die Bilinearform und die Definition der Risikogewichte identisch
- Im Allgemeinen gibt  $g^{Orth}(u)$  die wahre Risikomessung  $f(u)$  im Kalibrierungsportfolio, alle partiellen Ableitungen ausgehend vom Kalibrierungsportfolio sowie partielle Ableitungen zweiter Ordnung für Richtungsvektoren  $v_1, v_2 \in \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$  richtig wieder

# Agenda

Motivation – Wurzelformel und marginale Kapitalbedarfe

Korrelationsparameter in der Wurzelformel

- Konzepte
- Kalibrierung
- Fallstudie

Orthogonale Szenarien

Fazit

# Fazit

- Ziel: Methoden zur Risikoaggregation finden, von welchen sinnvolle Steuerungsimpulse ausgehen
- Korrelationsparameter in der Wurzelformel:
  - Durch VaR-implizierte Korrelationen als „State-of-the-Art“-Methode typischerweise Fehlbewertung marginaler Kapitalanforderungen
  - Mit sensitivitäts-implizierten Korrelationen liefert Wurzelformel korrekte Sensitivitäten erster und zweiter Ordnung; recht robust wenn das aktuelle Portfolio vom Kalibrierungsportfolio abweicht
  - Kalibrierung sensitivitäts-implizierter Korrelationen vergleichbar mit VaR-implizierten Korrelationen
- Ausgestaltung von risiko- bzw. segmentübergreifenden Szenarien:
  - Vorschlag eines Maßes stochastischer Abhängigkeiten, welches die Kovarianz für nichtelliptische Verteilungen verallgemeinert
  - Für Szenarien, die anhand des vorgeschlagenen Maßes orthogonal sind, können Verluste analog zur PCA aggregiert werden
  - Anwender führt Risikomessung anhand geringer Zahl von Szenarien durch und erhält eine (im gegebenen Kontext) angemessene Beurteilung von Strategien

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Grundlage dieses Vortrags:

Paulusch, J. & Schlütter, S. (2019). Making the square-root formula compatible with capital allocation. ICIR working paper no. 33

<http://www.icir.de/research/publications/working-paper-series/>

Aigner, P. & Schlütter, S. (2020). Scenario-based Risk Measurement for Portfolio Management, work in progress

Gern können Sie mich für Anmerkungen und Rückfragen per E-Mail erreichen:

[sebastian.schluetter@hs-mainz.de](mailto:sebastian.schluetter@hs-mainz.de)

# Referenzen

- Asimit, V., Peng, L., Wang, R., & Yu, A. (2019). An efficient approach to quantile capital allocation and sensitivity analysis. *Mathematical Finance*.
- Boonen, T. J., Tsanakas, A., & Wüthrich, M. V. (2017). Capital allocation for portfolios with non-linear risk aggregation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 72, 95-106.
- Braun, A., Schmeiser, H., & Schreiber, F. (2017). Portfolio optimization under Solvency II: Implicit constraints imposed by the market risk standard formula. *Journal of Risk and Insurance*, 84(1), 177-207.
- Braun, A., Schmeiser, H., & Schreiber, F. (2018). Return on risk-adjusted capital under Solvency II: Implications for the asset management of insurance companies. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 43(3), 456-472.
- Breuer, T., Jandačka, M., Rheinberger, K., & Summer, M. (2010). Does adding up of economic capital for market-and credit risk amount to conservative risk assessment?. *Journal of Banking & Finance*, 34(4), 703-712.
- Buch, A., Dorfleitner, G., & Wimmer, M. (2011). Risk capital allocation for RORAC optimization. *Journal of Banking & Finance*, 35(11), 3001-3009.
- Campbell, R., Koedijk, K., & Kofman, P. (2002). Increased correlation in bear markets. *Financial Analysts Journal*, 58(1), 87-94.
- Chen, T., Goh, J. R., Kamiya, S., & Lou, P. (2019). Marginal cost of risk-based capital and risk-taking. *Journal of Banking & Finance*, 103, 130-145.
- Christiansen, M. C., Denuit, M. M., & Lazar, D. (2012). The Solvency II square-root formula for systematic biometric risk. *Insurance: Mathematics and Economics*, 50(2), 257-265.
- Erel, I., Myers, S. C., & Read Jr, J. A. (2015). A theory of risk capital. *Journal of Financial Economics*, 118(3), 620-635.
- European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA), 2014. The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation.
- Fischer, K., & Schlütter, S. (2015). Optimal investment strategies for insurance companies when capital requirements are imposed by a standard formula. *The Geneva Risk and Insurance Review*, 40(1), 15-40.
- Furman, E., Kye, Y., & Su, J. (2019). A reconciliation of the top-down and bottom-up approaches to risk capital allocations: Proportional allocations revisited.
- Gatzert, N., & Kosub, T. (2017). The Impact of European Initiatives on the Treatment of Insurers' Infrastructure Investments Under Solvency II. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 42(4), 708-731.

# Referenzen

- Gourieroux, C., Laurent, J. P., & Scaillet, O. (2000). Sensitivity analysis of values at risk. *Journal of empirical finance*, 7(3-4), 225-245.
- Hong, L. J., & Liu, G. (2009). Simulating sensitivities of conditional value at risk. *Management Science*, 55(2), 281-293.
- Hull, J. (2018). *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley Finance Series. 5th Edition.
- Li, J., Zhu, X., Lee, C. F., Wu, D., Feng, J., & Shi, Y. (2015). On the aggregation of credit, market and operational risks. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 44(1), 161-189.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools-revised edition*. Princeton university press.
- McNeil, A. J., & Smith, A. D. (2012). Multivariate stress scenarios and solvency. *Insurance: Mathematics and Economics*, 50(3), 299-308.
- Mittnik, S. (2014). VaR-implied tail-correlation matrices. *Economics Letters*, 122(1), 69-73.
- Moschopoulos, P. G. (1985). The distribution of the sum of independent gamma random variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 37(1), 541-544.
- Myers, S. C., & Read Jr, J. A. (2001). Capital allocation for insurance companies. *Journal of risk and insurance*, 545-580.
- Pfeifer, D., & Strassburger, D. (2008). Solvency II: stability problems with the SCR aggregation formula. *Scandinavian actuarial journal*, 2008(1), 61-77.
- Tasche, D., 2008. Capital allocation to business units and sub-portfolios: The Euler principle, in: Resti, A. (Ed.), *Pillar II in the New Basel Accord: The Challenge of Economic Capital*. Risk Books, London, pp. 423-453.